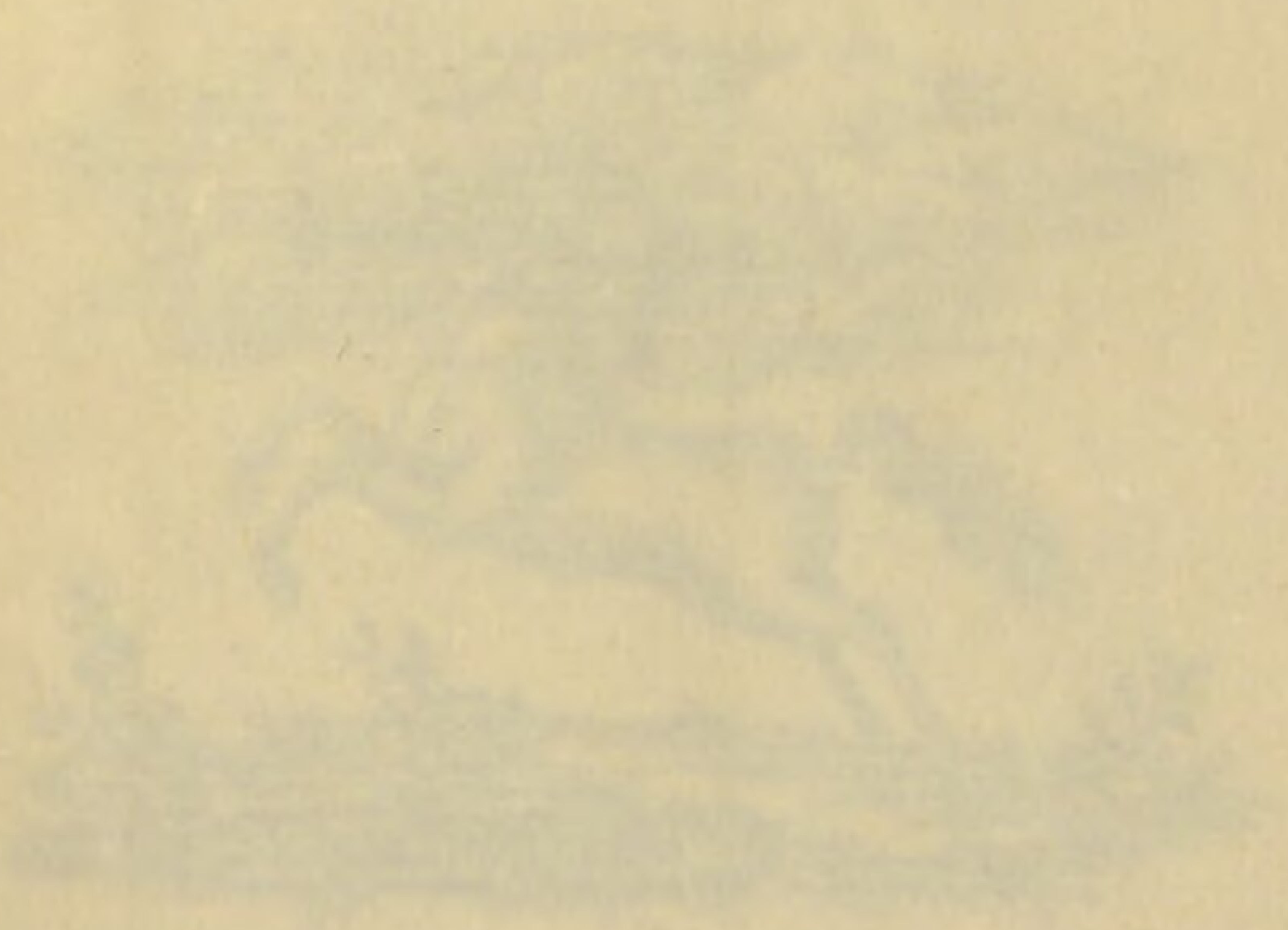
Math. P. 257

Analytische Trigonometrie

von

Georg Simon Klügel

[illegible]



Braunschweig

[illegible]

Analytische Trigonometrie

von

Georg Simon Klügel

der Mathematik ordentlichen Lehrer auf der Julius Carls Universität, der Göttingischen Königl. Gesellschaft der Wissenschaften Correspondenten, und einiger gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Braunschweig

In Verlag der Fürstl. Waisenhausbuchhandlung 1770.

Klügel. Anal. Trigonometrie
59
BS div.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

An

Herrn Hofrath

Kästner

zu Göttingen

und

Herrn Professor

Büsch

zu Hamburg.

Verehrungswehrte Gönner und Freunde.

Sie erlauben, daß ich mit Weglassung der so beschwerlichen Canzleytitulaturen Sie so anrede, wie mein Herz Sie nennt, da ich bey Ueberreichung dieser Schrift die Gelegenheit ergreife, Ihnen die Empfindungen der lebhaftesten Dankbarkeit und vollkommensten Hochachtung, welche ich für Sie hege, öffentlich zu bezeugen. Die Freundschaft, womit Sie

mich beehren, ist mein Stolz. Vergönnen Sie es doch auch dieser Schrift, daß sie sich mit den ihrem Verfasser so wehrten Namen zieren, und der Welt dadurch empfehlen dürfe.

Als meinen Lehrern bin ich Ihnen, Hochzuehrende Herren, für Unterricht, Aufmunterung und alle Arten von literarischer Hülfsleistung unvergeslichen Dank schuldig. Aber, was ich nie ohne ein besonderes Vergnügen denke, ist, daß meine beyden Lehrer in der Mathematik auch meine vorzüglichsten Gönner gewesen sind, die sich in die Sorge für mich gleichsam getheilt, und durch Ihre Empfehlungen einer mir meine erste sehr gute Versorgung nach vollendeten akade-

mischen

mischen Jahren, der andere das Lehr-
amt, welches ich izt bekleide, verschaft
haben. Ich bin nicht der einzige, der
gegen Sie dergleichen Verbindlichkeiten
hat. Ihr menschenfreundliches Herz
macht es Ihnen beyden zu einem Ge-
schäfte, jungen Leuten, welche Hofnung
von sich erwecken, fortzuhelfen. Wie
sehr erheben Sie sich dadurch über den
Lehrer, der aus Stolz und Hartherzig-
keit um seine Zuhörer sich nicht weiter
bekümmert, als ob sie ihm die Collegia
zu gesezter Zeit bezahlen?

Erlauben Sie, daß ich Ihnen als
Kennern und Richtern noch einiges über
die Absicht und den Inhalt meiner
Schrift vortrage. Sie ist für solche be-

stimt, die nach Erlernung der allerersten Gründe der theoretischen Mathematik weiter gehen wollen. Diesen soll sie als der zweyte Theil der Elementar-Geometrie zum Gebrauch der analytischen Bearbeitung der höhern Geometrie, und in der Anwendung auf die mathematische Naturlehre und die praktische Mathematik dienen. Es schien mir dieser Theil noch nicht systematisch genug ausgearbeitet zu seyn, obgleich die Wahrheiten desselben alle schon in kürzern oder vollständigern Abhandlungen, gelegentlich oder in einem abgesönderten System vorgetragen sind. Was Euclidens Elemente für die zeichnende und synthetische Geometrie sind, dergleichen müsten wir auch für die rech-

rechnende Geometrie haben, auf welche man die Lehren der allgemeinen Arithmetik anwendet. Sie müssen vollständig ausgearbeitet werden, ihr Umfang muß dabey gehörig abgemessen und abgerundet seyn, ihre Herleitung aus einander muß auf die kürzeste und einleuchtendste Art geschehen, Eigenschaften, welche der Vortrag dieser Elemente wie der Vortrag jeder anderer haben muß. Aber auch ihre Form muß so eingerichtet werden, daß die Lehrsätze zu dem von ihnen zu machenden Gebrauch gelenkig und völlig fertig zur Hand seyn. Demnach muß die Bearbeitung schon der ersten Grundformeln wie aller überhaupt der Behandlung der Untersuchungen, zu

deren Dienst sie bestimt sind, gleichförmig vorgenommen werden. Diese Elemente müssen sich gegen die Schriften eines Eulers verhalten, wie Euclides gegen den Archimedes oder Apollonius.

Belehren Sie mich, Hochgeehrteste Herren, wie weit ich diese meine Foderungen an mich selbst erfüllt habe. Ihre Weisung, wo und wie ich gefehlt habe, soll mir wegen des daraus zu erhaltenden Unterrichts so willkommen seyn, als mir Ihr Lob erwünscht und schäzbar ist.

Ein Anfänger hat nicht viel nöthig, um mein Buch zu verstehen. Was er nöthig hat, ist ihm ohnedem nothwendig zu wissen, wenn er die darin enthaltenen

Wahr-

Wahrheiten brauchen will. Die Theorie der Gleichungen muste ich voraussetzen, da das ganze Buch eine Combination und Entwickelung von Gleichungen ist, statt deren ich nur da Analogien genommen habe, wo ihre Zusammensetzung leichter übersehen werden konnte, als die der in ihnen enthaltenen Gleichungen. Den binomischen Lehrsatz setze ich auch voraus, doch habe ich noch einen Versuch eines Beweises desselben angehängt, wie man ihn auf gebrochne und verneinte Exponenten erweitern könne, ohne aus den Grenzen der Analysis des Endlichen herauszugehen. Einiges von den arithmetischen Progreßionen, das ich brauchte, habe ich im Buche selbst

mit-

mitgenommen, welches desto mehr nöthig war, weil der Gebrauch davon, soviel ich glaube, mir ganz eigen gehört. Die Analysis des Unendlichen habe ich vermieden, und sie nur an zwey Stellen gebraucht, wo sie unentbehrlich war, bey der Erfindung des Inhalts eines sphärischen Dreyecks, und den Differentialformeln für die Veränderungen ebener und sphärischer Dreyecke. Die Vergleichung der Cirkelbogen mit den trigonometrischen Linien habe ich ohne die Differentialrechnung zu bewerkstelligen gesucht. Ueberhaupt habe ich mich bemüht, die Sätze so zu ordnen, daß die Beweise zugleich den Weg der Erfindung enthielten, nicht den, auf welchem sie wirklich erfun-

den

den sind, sondern auf dem sie hätten können erfunden werden, wenn man nur beym Erfinden den kürzesten Weg zu nehmen pflegte. Ich sezte mich deswegen beym Schreiben immer in die Verfassung, als wenn ich die Wahrheiten erst zu erfinden hätte. Dadurch machte ich mir das Schreiben angenehmer, und hofte desto leichter die Ungleichheiten des Zusammenstopplers zu vermeiden, und das Ganze in einen Ton zu stimmen. Ich schmeichle mir deswegen, daß diese Schrift von einer Compilation nichts an sich haben soll. Verschiedene Beweise und Wendungen kan ich mein nennen, ob ich es gleich deswegen noch nicht wage, sie für neu auszugeben.

Er-

Erhalten Sie mir, verehrungswür-
dige Freunde, Ihre mir höchst kostba-
re Freundschaft. Ich habe die Ehre mit
der vollkommensten Ergebenheit und
Hochachtung zu seyn

Ihr

Helmstädt,
den 9ten August
1770.

gehorsamster Diener
G. S. Klügel.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Von den trigonometrischen Functionen S. 1.

Zweytes Kapitel.

Analysis der geradlinichten Dreyecke S. 18.

Drittes Kapitel.

Vergleichungen zwischen den trigonometrischen Functionen einfacher und zusammengesezter Winkel S. 34.

Viertes Kapitel.

Ueber die trigonometrischen Functionen vielfacher Winkel S. 46.

Fünftes Kapitel.

Erfindung der trigonometrischen Functionen

ctionen aus den Winkeln und diese
aus jenen S. 126

Sechstes Kapitel.

Die sphärische Trigonometrie S. 151

Siebentes Kapitel.

Beyspiele von dem Gebrauch der sphäri
schen Trigonometrie S. 195

Achtes Kapitel.

Differentialformeln, die Veränderunge
der Seiten und Winkel in ebenen un
sphärischen Dreyecken auszudrücke
S. 213

Anhang.

Erweis des binomischen und polynomi
schen Lehrsatzes für jede Gattung vo
Exponenten S. 234

Bayerische Staatsbibliothek

Analytische Trigonometrie.

Erstes Kapitel
Von den trigonometrischen Functionen.

I.

Bey den meisten mathematischen Untersuchungen über den Zusammenhang verschiedener Grössen, die sich aus einander bestimmen, kömt es hauptsächlich auf die Verbindung der Linien, der Ebenen und ihrer Winkel untereinander an. Die allgemeinen Lehrsätze, welche die mancherley Arten dieser Verbindung entwickeln und darstellen, sind es vor andern analytischen allgemeinen Sätzen vorzüglich, welche mit den besondern Bestimmungen jeder Untersuchung verknüpft, den Weg zur Auflösung bahnen. Ihr ausgebreiteter Einfluß macht sie daher sehr wichtig. Wenn man sich ihrer mit Vortheil zu be-

dienen weiß, so kan man weitläuftige Demonstrationen kurz und einfach machen, weil man das, was in ihnen steckt, für einen einzelnen Fall aufzusuchen nicht nöthig hat. Die Wissenschaft, welche die Samlung dieser Sätze ist, heißt die Trigonometrie, eigentlich die Lehre von der Ausmessung der Drenecke. Sie hat aber, wie die Geometrie, einen weitern Umfang, als ihr Nahme anzuzeigen scheint, und als ihr in den gewöhnlichen Handbüchern gegeben wird, und gegeben werden kan. Sie zerfällt in zwey Theile, in die ebene und sphärische Trigonometrie. Jene beschäftigt sich mit geraden Linien, die in einer Ebene liegen, diese mit solchen, welche in verschiedenen Ebenen sich befinden. Die leztere ist daher zugleich die Lehre von der Lage der Ebenen gegen einander.

II.

Winkel und Linien sind ungleichartige Grössen, welche mit einander nicht können verglichen werden. Man muß statt der Winkel entweder die ihnen proportionalen Bogen des Cirkels, worauf sie für einen gegebenen Halbmesser stehen, oder solche Verhältnisse gerader Linien, woraus die Grösse eines Winkels sich bestimmen läßt, in die Rechnung hinein bringen. Jenes kan nicht recht wohl anders geschehen, als wenn die Bogen wiederum mit geraden Linien bequem können verglichen werden, oder wenn die Bogen ohne Ende klein sind; daher ist die leztere Methode brauchbarer, wodurch in der Rechnung nur gerade Linien zusammen kommen. Die geraden Linien, deren

deren Verhältnisse jeden Winkel zu bestimmen dienen, sind am einfachsten die Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks. Denn in dem bey B rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 1.) ist der Winkel A bestimt, so bald man das Verhältnis der Seiten AC : BC, oder AC : AB, oder AB : BC, festsezt, und umgekehrt. Ein schiefwinklichtes Dreyeck, worin der Winkel B für einen veränderlichen A immer derselbe bliebe, leistet dieses nicht allgemein ohne Zweydeutigkeit, und man würde das Verhältnis zwischen ein paar von desselben Seiten nicht unmittelbar und so bequem in das Verhältnis eines andern Paars verwandeln können, als man es bey dem rechtwinklichten vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes thun kan. Deswegen ist zu der gegenwärtigen Absicht das rechtwinklichte Dreyeck einzig brauchbar. Es ist gleichgültig, wie groß man die Seiten desselben annehmen will, weil für denselben Winkel die gleichnahmigen Seiten einerley Verhältnis behalten, und bey einerley Verhältnissen der Seiten der Winkel A derselbe bleibt, wie auch die Grösse der Seiten verändert werden mag.

III.

Das Verhältnis BC : AC oder der Quotient $\frac{BC}{AC}$ heißt der Sinus des Winkels A, der BC gegenüber liegt; der Quotient $\frac{AB}{AC}$ ist der Cosinus des Winkels A, welcher an AB liegt, oder

der Sinus des gegenüberliegenden Winkels C, der von A das Complement zu einem Rechten ist. Der Quotient $\frac{CB}{AB}$ heißt die Tangente des Winkels A, welcher CB gegenüber und an AB liegt; der umgekehrte Bruch $\frac{AB}{CB}$ ist die Cotangente dieses Winkels, oder die Tangente des Winkels C, des Complements von A. Ich will diese Verhältnisse mit einem allgemeinen Nahmen: **trigonometrische Functionen der Winkel** nennen, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten.

In den Anleitungen zur Trigonometrie pflegen die Linien BC, AB, selbst für die Sinus oder Tangenten, für die Cosinus oder Cotangenten genommen zu werden. Dis zieht eine Verwirrung und Unbequemlichkeit in dem Gebrauche der Rechnung nach sich. Denn die trigonometrischen Functionen gegebener Winkel erhalten auf diese Art keine bestimte Wehrte, die sie doch haben müssen, und man muß dieselben am Ende doch für eine unveränderlich angenommene Linie AC oder AB berechnen. Auch sind sie ursprünglich nicht Linien, sondern Zahlen, oder die Exponenten gewisser Verhältnisse, welche die Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks für einen gegebenen Winkel haben.

IV.

Den Sinus eines Winkels bezeichne man so, sin. A; den Cosinus, cos. A; die Tangente, tang. A; die Cotangente, cot. A, so hat man diese Grundformeln.

1)

1) $\frac{BC}{AC} = \text{ſin. } A$

2) $\frac{AB}{AC} = \text{coſ. } A$

3) $\frac{BC}{AB} = \text{tang. } A. = \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A}$

und $\text{tang. } A. \text{ coſ. } A = \text{ſin. } A.$

4) $\frac{AB}{BC} = \text{cot. } A = \frac{\text{coſ. } A}{\text{ſin. } A} = \frac{1}{\text{tang. } A}$

und $\text{ſin. } A. \text{ cot. } A = \text{coſ. } A.$

5) $\text{ſin. } A^2 + \text{coſ. } A^2 = 1$

weil $\frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1.$

Man pflegt auch noch die Secanten und Coſecanten unter die trigonometriſchen Functionen zu zählen. Sie ſind aber überflüßig. Die Secante eines Winkels A iſt nichts als der Quotient $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\text{coſ. } A}$, und die Coſecante der Quotient $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\text{ſin. } A}$. Eben ſo iſt der Sinus verſus nur ein abgekürzter Ausdruck für $1 - \text{coſ. } A$.

V.

Wenn die Hypotenuſe AC für die Einheit genommen wird, ſo drükt BC den Sinus des Winkels A, und AB deſſelben Coſinus aus. Iſt

aber AB die Einheit, so stellt BC die Tangente des Winkels A dar, und AC desselben Secante. Man beschreibe mit dem Halbmesser AC = 1 den Cirkel DFdD, (Fig. 2.) fälle von einem willkührlichen Punkte desselben C das Perpendikel CB auf den Halbmesser AD, so stellt BC den Sinus des Winkels CAB oder des Bogens CD dar, welcher für den Winkel gebraucht werden kan, und AB, das Stück des Halbmessers, das von BC abgeschnitten wird, drükt den Cosinus dieses Winkels aus. Man ziehe durch den Punkt D an den Cirkel die Berührungslinie DE, welche von der verlängerten AC in E geschnitten wird, so stellt DE die Tangente des Winkels A dar, weil die Kathete AD die Einheit ist, und AE wird die Secante, weil AB : AC = AD : AE oder

$AE = \frac{1}{AB} = \frac{1}{\cos. A}$. Man ziehe den Halbmesser FA senkrecht auf AD, und CH senkrecht auf FA, so wird CH = AB = dem Sinus CAF oder dem Cosinus CAD; durch F ziehe man die Berührungslinie GF an den Cirkel, welche von AC in G geschnitten wird, und es drükt GF die Tangente von CAF oder die Cotangente von CAD aus. Die Linie AG wird die Secante von CAF oder die Cosecante von CAD.

Wenn der Winkel = 0 ist, oder wenn C in D fällt, so wird der Sinus und die Tangente = 0, und der Cosinus = 1. Für zunehmende spitze Winkel wächst der Sinus und die Tangente, der Cosinus nimt ab. Wenn der Winkel ein rechter ist, so

so wird der Sinus =1, und heißt der Sinus totus, da die andern Brüche sind, der Cosinus wird =0; und die Tangente ohne Ende groß, die Cotangente ohne Ende klein, oder =0, wie dieses sowohl aus der Betrachtung der Figur, als der Formeln (1-4) erhellt.

Da es gleichgültig ist, welchen von den beiden Nebenwinkeln, DAC oder CAd, man für den Winkel der Linien DAd und CA nehmen will, so muß diese Zweydeutigkeit, welche die Geometrie nicht entscheidet, auch in die Rechnung übergetragen werden, wenn sie allgemein seyn soll. Man nehme den stumpfen Winkel DAc, dessen Complement cAd=CAD ist, und ziehe cb senkrecht auf Ad, so ist das Verhältnis cb:Ac gleich dem CB:AC, und der Sinus des stumpfen Winkels ist in aller Absicht mit dem Sinus des Complements zu zwey Rechten einerley. Auch ist der Quotient Ab:Ac dem AB:AC der Grösse nach gleich, aber wegen der entgegengesezten Lage der Linien Ab, AB, bekommen sie eine entgegengesezte Beziehung, und werden daher durch die Zeichen +, —, zu unterscheiden seyn. Ob es zwar gleichgültig ist, welchen von beiden man als bejaht oder verneint betrachten will, so pflegt man doch den Cosinus des spitzen Winkels bejaht, den Cosinus des stumpfen, der sein Complement ist, verneint zu nehmen. Für eben diesen Winkel cAd, ziehe man an d die Tangente de, welche von cA in e geschnitten wird, so ist wiederum der Quotient ed:Ad dem ED:AD gleich, aber entgegensezt, weil die Divisoren Ad und AD entge-

gengesezte Lagen haben. Die Tangente eines stumpfen Winkels ist also verneint, wenn die des spizen Complements bejaht ist. Dis stimt damit überein, daß tang. $A = \frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } A}$, und also verneint ist, wenn cos. A verneint wird, wie es für ein stumpfes A geschicht. Verschiedene gelehrte Mathematiker haben sich durch die gleiche Grösse und ähnliche Lage der Linien ed, ED verführen lassen, die Tangenten der stumpfen Winkel für positiv zu erklären. Man muß aber, wie schon oben erinnert ist, nicht die Linien ED, ed absolute für die Tangenten nehmen, sondern die Quotienten ED : AD, ed : Ad, welche von entgegengesezter Beziehung sind. Auch lehret die Analysis, daß der Uebergang von dem bejahten zum verneinten auf zweyerley Art geschehen kan, erstlich, wenn durch die beständige Verminderung eine Grösse Nichts und folgends verneint wird, oder zweytens, wenn sie, nachdem sie ohne Ende gewachsen ist, wieder abnimt. Die Cotangente Fg eines stumpfen Winkels DAc ist wie die Tangente negativ. Sie hat offenbar eine der Cotangente FG des spizen Complements entgegengesezte Lage.

Man nehme den Winkel DAQ dem DAC entgegengesezt, aber gleich, so wird das Perpendikel BQ, welches von dem Endpunkte Q, des Bogens DQ = — DC auf AD gefällt wird, dem Lohte CB gleich aber entgegengesezt.

Eben so der Quotient QB : AQ dem Quotienten

enten BC:AC, oder die Sinus gleicher entgegengesezter Winkel oder Bogen sind gleich und entgegengesezt. Die Cosinus solcher Winkel sind aber gleich und von derselben Beziehung, da AB für beide dieselbe Lage hat. Die Tangenten dieser Winkel sind wie die Sinus gleich und entgegengesezt. Was von spitzen entgegengesezten Winkeln gilt, gilt ebenfalls von dergleichen stumpfen. DAc, DAP. Rechnet man die Winkel immer von D nach C zu, so erhält man die negativen Winkel DAP oder DAQ, wenn man die positiven 2 R + dAP oder 2 R + dAQ, das ist, ihre Complemente zu vier Rechten positiv nimt. Die trigonometrischen Functionen dieser, über zwey Rechte grossen, positiven Winkel sind also einerley mit denen, die zu ihren Complementen zu vier Rechten gehören, wenn man diese Complemente negativ nimt. In dem dritten Quadranten sind folglich die Sinus und Cosinus verneint, die Tangenten bejaht, in dem vierten sind die Sinus und Tangenten verneint, und die Cosinus bejaht. Ferner werden daher die Sinus und Tangenten und Cotangenten der Winkel, deren Summe vier Rechte ausmacht, gleich aber entgegengesezt, ihre Cosinus gleich und gleichnahmig.

VI.

Die Schlüsse des vorhergehenden Artikels lassen sich in diese Formeln fassen;

6) $\sin. A = + \sin. (2R - A) = + \cos. (R - A)$
$= - \sin. (2R + A) = - \cos. (R + A)$
$= - \sin. (4R - A) = - \mathrm{cs}. (3R - A)$
$= + \mathrm{cs}. (3R + A)$

 7) cos.

7) $\cos A = - \cos(2R - A) = + \sin(R - A)$
$= - \cos(2R + A) = + \sin(R + A)$
$= + \cos(4R - A) = - \sin(3R - A)$
$= - \sin(3R + A)$

8) $tg\, A = - tg(2R - A) = + \cot(R - A)$
$= + tg(2R + A) = - \cot(R + A)$
$= - tg(4R - A) = + \cot(3R - A)$
$= - \cot(3R + A)$

In diesen Formeln liegt der Grund, daß die Rechnung alle verschiedene Fälle, welche die Geometrie unterscheidet, und sie besonders vornehmen muß, in eine einzige Formel fassen kan, die aus der Betrachtung eines einzelnen Falles hergeleitet wird. Eine gerade Linie kan gegen eine andere zwey gleiche entgegengesezte Lagen haben, wie die Linien CP und Qc gegen Dd. (F. 2.) Bestimt man diese Lagen durch die Winkel von demselben Schenkel nach einerley Gegend zugenommen, so geben diese zwey gleiche entgegengesezte Lagen vier Winkel, deren trigonometrische Functionen gleich, aber je zwey und zwey einander entgegengesezt sind. Diese Functionen gehen ins entgegengesezte über, so wie die Linien, deren Verhältnisse sie ausdrücken, oder die Katheten des rechtwinklichten Dreyeks, worin zwey Seiten die Lage jener Linien haben, eine entgegengesezte Lage bekommen. Also werden die Veränderungen, die hiedurch in der geometrischen Zusammensetzung aller andern Linien entstehen, die von diesem Winkel abhangen, in ihrem algebraischen Ausdruck gleichförmig vorgenommen, in dem man zu folge den Formeln (6-8) die Zeichen der trigonometri-

metrischen Functionen gehörig ändert. Im folgenden werden verschiedene Beyspiele dieses erläutern.

VII.

Die Methode zu einer leichten Berechnung der trigonometrischen Functionen für jeden Winkel kan erst im folgenden gelehrt werden. Doch mag folgendes vorläufig dienen, um einzusehen, wie man aus den Sinus und Cosinus der einfachen Winkel, die Sinus und Cosinus der doppelten, und umgekehrt findet. Man beschreibe mit dem Halbmesser AC = 1 (Fig. 3.) den Halbcirkel CDB, worin DE der Sinus des Winkels CAD, der schlechtweg mit A bezeichnet sey, und EA desselben Cosinus ist. Man ziehe auf die Chorde CD das Perpendikel AF, so ist CF = FD der Sinus des Winkels CAF = $\frac{1}{2}$ CAD, und FA dessen Cosinus. Ferner ziehe man nach dem Endpunkt B des Durchmessers CAB die Chorde BD, so ist diese wegen des rechten Winkels bey D parallel mit FA, und, weil CB = 2 CA, so ist DB = 2 FA. Die ähnlichen Dreyecke ACF und DCE geben die Analogie AC : CF = CD : CE, oder 1 : sin. $\frac{1}{2}$ A = 2 sin. $\frac{1}{2}$ A : 1 — cos. A, das ist

$$2(\sin.\tfrac{1}{2}A)^2 = 1 - \cos.A.$$

Eben so ist in den ähnlichen Dreyecken CAF, DBE, CA : AF = DB : EB, oder 1 : cos. $\frac{1}{2}$ A = 2 cos. $\frac{1}{2}$ A : 1 + cos. A, das ist

$$2(\cos.\tfrac{1}{2}A)^2 = 1 + \cos.A$$

Ferner AC : CF = DB : DE, oder 1 : sin $\frac{1}{2}$ A = 2 cos. $\frac{1}{2}$ A : sin. A das ist

$$\sin A = 2\sin.\tfrac{1}{2}A.\cos.\tfrac{1}{2}A$$

Der

Der Sinus eines Winkels ist die halbe Chorde des doppelten Winkels. Da nun die Geometrie die Seiten des ordentlichen Vierecks, Fünfecks und Sechsecks liefert, so sind deren Hälften die Sinus der halben Centriwinkel, aus welchen man auch die Cosinus dieser Winkel findet. Durch diese findet man vermittelst der gegebenen Formeln die Sinus und Cosinus von den Hälften der halben Centriwinkel, und so immer ohne Ende fort. Die Berechnung ist aber mühsam und nicht zulänglich.

VIII.

Zum Gebrauche nehmen wir die Sinus, Cosinus und Tangenten als gefunden an, wie sie in den trigonometrischen Tafeln berechnet sind. In diesen hat man die Zahlen, welche als Sinus und Tangenten zu jedem Winkel geordnet sind, für die Zähler von Brüchen anzunehmen, deren gemeinschaftlicher Nenner 10000000 (in den gewöhnlichen Tafeln) oder überhaupt der Sinus von 90° ist. Dis gibt den Sinus totus = 1. Daher sind die Logarithmen aller Sinus, Cosinus, und aller Tangenten von Winkeln unter 45° eigentlich verneint; man hat ihnen allen aber 10 geliehen, um die Unbequemlichkeit des Zeichens (—) zu vermeiden. Die Logarithmen der Tangenten von Winkeln über 45° sind positiv, weil ihre Zahlen grösser als Eins sind. Der Gleichförmigkeit wegen hat man ihnen auch 10 geliehen. Wenn man daher in der Rechnung den Logarithmen eines Sinus u. d. g. bekömt, so hat man immer 10 zu ihm zu addiren, wenn man ihn in

den Tafeln aufsuchen will. Kömt nun zu dem Logarithmus eines Sinus aus den Tafeln so viel hinzu, daß die Summe über 10 wird, so werden die geliehene Zehn wieder weggeworfen. z. E. der Logarithme von 1000. sin. 35° ist 3 + 9,7585913 = 2,7585913, wozu nächstens die Zahl 573,5 gehört. Wenn man den Logarithmen von $\frac{1000}{\sin. 35^\circ}$ finden wollte, so muß man zu dem Logarithmen des Dividendus 10 addiren, weil der Logarithme des Divisors um 10 zu groß genommen ist. Die Rechnung gibt, 10 + 3 — 9,7585913 = 3,2414087, wozu nächstens die Zahl 1744 gehört. Wenn ein Sinus in einen andern Sinus, Cosinus oder Tangente multiplicirt wird, so wirft man von der Summe der Logarithmen einen Zehner weg. Z. E. Da sin. 2 A = 2 sin. A. cos. A ist, (VII) so nehme man aus den Tafeln

log. sin. 36° = 9, 7692187
log. cos. 36° = 9, 9079576
log. 2 = 0, 3010300

die Summe ist 19, 9782063

oder 9, 9782063 = l. sin. 72°

Eben so verfährt man, wenn man die Logarithmen von Potenzen der Sinus und Tangenten sucht. Die vielfachen von 10, welche in der Charakteristik sind, wirft man weg. Denn die Zehn, welche man dem Logarithmen des einen Factors des Products geliehen hat, muß dem Defect in den Logarithmen

rithmen der übrigen Factoren aushelfen, welchen man daher nichts zu leihen braucht; oder, wenn man ihnen geliehen hat, so wirft man aus der Summe das geliehene weg. Weil nach (VII) $2\,\text{sin.}(\frac{1}{2}A)^2 = 1 - \text{cos.}A$. so nehme man $\frac{1}{2}A = 36$, und suche $2(\text{sin.}\frac{1}{2}A)^2$.

$$\text{sin. } 36^\circ = 9,7692187$$

$$\log.(\text{sin. } 36^\circ)^2 = 9,5384374$$

$$\log. 2 = 0,3010300$$

$$\log. 0,691 = 9,8394674$$

also $1 - 0,691 = 0,309 = \text{cos. } 72^\circ$ nächstens. Man muß wissen, daß man, den Logarithmen eines Decimalbruchs zu finden, dem Logarithmen des Zählers einen Zehner leihet, daher bekömt der Logarithme eines solchen Bruchs zur Charakteristik eine Neun, wenn er Zehntheile enthält, eine Acht, wenn seine höchste Zifer Hundertheile sind, u. s. w. Auch ist noch zu bemerken, daß, wenn man den Logarithmen zu dem Quadrat eines Sinus oder überhaupt eines Decimalbruchs hat, und den Logarithmen der Wurzel finden will, man vor der Halbirung einer Zehner addiren müsse. Denn wenn man den Logarithmus verdoppelt, um den Logarithmen des Quadrats zu haben, so wirft man einen Zehner weg. Also muß man, um den Logarithmus der Wurzel durch die Halbirung rükwärts zu bekommen, vorher diesen weggeworfenen Zehner hinzuthun. Bey den höhern Potenzen verfährt man auf eine ähnliche Art. Der Logarithme zu dem Cubus eines Decimalbruchs

bruchs ist der dreyfache der Wurzel, um zwanzig vermindert; und der Logarithme der Wurzel ist ein Drittheil des Logarithmen des Cubus, der vorher um 20 vergrössert ist. u. s. f.

IX.

Wenn Winkel selbst in die Rechnung hineinkommen, so muß man für sie die Bogen nehmen, welche ihr Maaß sind, und deren Länge in Theilen des Halbmessers, der die Einheit ist, ausgedrückt wird. (Fig. 4.) Für den Winkel BAC beschreibe man mit dem Halbmesser $AB = 1$ den Bogen BC, sein Maaß. Die Länge dieses Bogens in Theilen des Halbmessers bezeichne man durch φ, so bezeichnet dieses φ auch den Winkel BAC. Würde der Winkel durch einen andern Bogen $DE = \omega$ für den Halbmesser $AD = r$ gemessen, so muß man den Winkel $DAE = BAC$ durch $\frac{\omega}{r}$ bezeichnen. Denn es ist $AD : AB = ED : CB$ oder $r : 1 = \omega : \varphi$, also ist die Grösse des Winkels $\varphi = \frac{\omega}{r}$; und $\omega = r\varphi$. Hier ist nur von der Bezeichnung die Rede. Die Winkel würklich so zu messen, wie hier vorgeschrieben wird, sezt voraus, daß man die Länge der ganzen oder halben Peripherie in Theilen des Halbmessers, so genau als erfodert wird, angeben könne, welches unten gelehret werden wird.

Sonst bestimt man die Lage zweyer Linien gegen einander durch das Verhältnis ihres Winkels

kels zu einem Rechten. Man gibt dem Rechten neunzig gleiche Theile. Diese Eintheilung ist zur Verfertigung der Instrumente sehr bequem, übrigens ist sie ganz willkührlich, und in Rechnungen, wo Winkel hinein kommen, nicht zu gebrauchen, weil man zweyerley Einheiten bekäme, wenn man den Halbmesser und alle übrige Linien nicht etwa auch durch diese Theile des Quadranten messen wollte. Man muß also die Bogen, welche das Maaß der Winkel sind, durch die einmahl angenommene Einheit messen.

Es bedeute π die halbe Peripherie für den Halbmesser $= 1$, φ einen Winkel oder den zugehörigen Bogen für eben diesen Halbmesser, und n die Anzahl der Secunden, welche dieser Winkel enthält, so hat man die Analogie $648000 : n = \pi : \varphi$. Die halbe Peripherie enthält 648000 Secunden. Folglich ist

9) $\varphi = \dfrac{n\pi}{648000}$ und

10) $n = \dfrac{648000}{\pi}\varphi$

Wenn der Bogen zum Halbmesser nicht die Einheit hat, so nenne man den Halbmesser r, den Bogen ω, und es ist, wegen $\varphi = \dfrac{\omega}{r}$

11) $\omega = \dfrac{nr\pi}{648000}$,

12) $n = \dfrac{648000}{\pi r}\omega$

Die

X.

Die Dimension einer Grösse ist die Menge der Factoren, worin sie würklich, oder in Gedanken zerfällt wird. Z. E. Es bedeuten a, b, einfache Grössen, die in keine Factoren zerfallen, so hat aab drey Dimensionen; aber von $a^{\frac{2}{3}}$ oder $(aa)^{\frac{1}{3}}$ ist die Dimension ein Zweydrittheil, weil das Product aus zwey einfachen Factoren, aa, wieder in drey gleiche zerfällt werden soll.

So ist $a^{\frac{2}{3}}bb$, ein Product von der Dimension Achtdrittheil. Die Summe aller Exponenten von den Factoren eines Products zeigt die Dimension desselben an. Die Dimension eines Divisors ist negativ zu nehmen. Zahlen haben keine Dimension. Sie zeigen nur bloß an, wie oft eine gewisse Grösse in der Rechnung vorkömt. Die trigonometrischen Functionen, als Zahlen, haben auch keine Dimension. Will man sie aber von den Zahlen, die mit ihnen in der Rechnung vorkommen, unterscheiden, und ihre Dimensionen zählen, so muß man die Verhältnisse der Linien, welche sie anzeigen, durch die Linien selbst, nicht auf die abgekürzte Art, wie bisher geschehen, ausdrücken. Es sey (Fig. 2.) der Halbmesser AC = r, das Perpendikel BC = s, AB = c; die Tangente DE = t, so ist $\sin. A = \frac{s}{r}$; $\cos. A = \frac{c}{r}$; $\text{tang.}\, A = \frac{t}{r}$. Diese Wehrte $\frac{s}{r}$, $\frac{c}{r}$, $\frac{t}{r}$, müssen für sin A ꝛc. gesezt werden, damit diese Grössen in der Rech-

nung auch der äussern Form nach als Zahlen erscheinen. Nemlich das Verhältnis, $\frac{s}{r}$, ist eine blosse Zahl, und so die übrigen. Aber s, c, t, r, sind Linien, von welchen man Dimensionen zählen kan, und es stellen nach dieser Substitution, s, c, t, den Sinus, Cosinus und die Tangente, für den Halbmesser r berechnet, vor.

Oder man kan r sin. A, r cos. A, r tang. A statt sin. A etc. schreiben, und diese zusammengesezten Ausdrücke für die Zeichen einer einfachen Grösse nehmen, welches noch leichter ist, und mit jener Substitution auf eins hinauskömt. Man muß nur acht haben, daß jeder Theil der Gleichung durch dieselbe Potenz von r multipliciret werde.

Zweytes Kapitel.

Analysis der geradlinichten Dreyecke.

I.

Wir wollen izt die Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines geradlinichten Dreyecks aufsuchen. In diesem bestimt sich aus drey Stücken, die nur nicht alle Winkel seyn müssen, jedes der drey übrigen, den Fall ausgenommen, wenn zwey Seiten BC, AC, (Fig. 5. 6.) nebst dem Winkel B, der AC gegenübersteht, gegeben sind, in welchem es zweydeutig bleibt, ob AC auf die eine Seite des Perpendikels CD, wie Fig. 5., oder auf die andere wie Fig. 6. falle, ob

daher

daher der Winkel A spitz oder stumpf, und C die Summe oder der Unterschied der Winkel BCD und ACD sey. Aber die Gleichung zwischen diesen drey Stücken nebst A oder C muß nur so beschaffen seyn, daß sie ebenfalls diese Zweydeutigkeit nicht entscheide. Die drey gegebenen Stücke und das eine gesuchte sind entweder zwey Seiten und die beiden gegenüberstehenden Winkel; oder zwey Seiten und zwey Winkel, deren einer von diesen Seiten eingeschlossen wird; oder drey Seiten und ein Winkel. Aus drey Winkeln folgt zwar nichts für jede der Seiten; es bestimt sich aber jeder aus den beiden andern. Für die verschiedenen Verbindungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreyecks muß es also drey Gleichungen zwischen je vier Stücken desselben geben, worunter aber nicht alle Winkel vorkommen müssen. Für die trigonometrischen Functionen der Winkel muß noch eine besondere Gleichung gesucht werden.

II.

Man bezeichne in dem Dreyeck ABC die Winkel durch die Buchstaben A, B, C, (Fig. 5. und 6.) die an den Scheiteln derselben stehen. Die ihnen gegenüberstehenden Seiten bezeichne man durch a, b, c. Man fälle von C das Perpendikel CD auf AB, welches entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreyeks fällt. In beiden Fällen hat man die Analogien,

$$AC : CD = 1 : \sin. A$$
$$CD : BC = \sin. B : 1 \qquad (1)$$

also $AC : BC = \sin. B : \sin. A.$

Weil

Weil der Sinus eines stumpfen Winkels gänzlich derselbe mit dem Sinus des spitzen Complements ist, so läßt die Rechnung ebenfalls das unbestimt, was die Geometrie nicht entscheidet. Die erste der gesuchten Gleichungen ist folglich diese,

13) $b \sin. A = a \sin. B$

worin man auch für A und a oder B und b, den Winkel C und die Seite c setzen kan.

III.

Weiter ist (F.5.) $CD = b \sin. A$, $AD = b \cos. A$, $BD = BA - AD = c - b \cos. A$, und $tg. B = \frac{CD}{BD}$, also $tang. B = \frac{b \sin. A}{c - b \cos. A}$, welches die zweyte der gesuchten Gleichungen ist. Sie ist allgemein, der Winkel A mag stumpf oder spitz seyn. Wenn er stumpf ist, so ist $BD = BA + AD$. Weil aber $\cos. A$ alsdenn negativ ist, so wird $- b \cos. A$ in der Gleichung positiv. Dies ist ein Exempel zu der Betrachtung Kap. I. VI. Für ein stumpfes A bekömt die Linie AD eine entgegengesezte Lage, und wird addirt, aber ihr Wehrt $b \cos. A$ verändert in dem algebraischen Ausdruck alsdenn ebenfalls sein Zeichen.

Wenn in dieser Gleichung A und B sich unter den gegebenen Grössen befinden, so hat man den dritten Winkel C auch, und es ist bequemer, diesen in die Rechnung zu bringen, um dadurch nach (13) b oder c zu finden. Wenn A gesucht

gesucht wird, so muß man den sin. A oder cos. A herausschaffen, indem man für den einen seinen Wehrt durch den andern ausgedrükt sezt. Dadurch bekömt man Wurzelgrössen in der Gleichung, welche herauszubringen die Gleichung quadrirt werden muß, die dadurch eine quadratische wird, worin der Sinus oder Cosinus des Winkels A zwey Wehrte bekömt. Dis ist der Fall, da zwey Seiten und der eine gegenüberstehende Winkel gegeben sind, und der eingeschlossene gesucht wird, für welchen die Geometrie zwey Wehrte liefert, ein Beyspiel, wie die Rechnung alle Fälle der geometrischen Zusammensetzung in eine Formel fassen kan. Wenn B gesucht wird, so ist die Formel am brauchbarsten. Um sie bequem zur Anwendung zu machen, verändere man sie folgendergestalt.

14) $\cot. B = \frac{c}{b \sin. A} - \frac{\cos. A}{\sin A} = \frac{c}{b \sin. A} - \cot. A$

(4) oder wenn man C sucht,

$$\cot. C = \frac{b}{c \sin. A} - \cot. A$$

Diese Formel dient, aus zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel jeden der übrigen zu finden. Für diesen Fall pflegen gewöhnlich die Logarithmen der Seiten gegeben zu seyn, daher die Formel sehr bequem zur Rechnung ist, bequemer als die gewöhnliche, welche man in den Elementar-Einleitungen zur Trigonometrie für diesen Fall findet. Wenn A stumpf ist, so wird cot. A addirt. Ist der verneinte Theil grösser als der be-

bejahte, so zeigt dis an, daß B oder C stumpf ist. Man sucht alsdenn den Winkel, der zu der verneinten Cotangente, als positiv betrachtet, gehöret, und addirt 90° dazu, so wie man, wenn sie positiv ist, sie als Tangente betrachtet, und den dazu gehörigen Winkel von 90° abzieht. (8)

IV.

Weil CBqu = CDqu + BDqu, so ist $aa = bb\,(\sin. A)^2 + cc - 2bc.\cos. A + bb\,(\cos. A)^2 = bb - 2bc.\cos. A + cc$, (5). Die dritte der gesuchten Gleichungen ist also

15) $aa = bb - 2bc.\cos. A + cc$

Wenn a, b, A gegeben sind, so wird c durch eine quadratische Gleichung bestimt, und bekömt also zwey Wehrte, wie es durch die geometrische Construction auch bekömt. Eben so b, wenn a, c, A gegeben sind. Wenn b, c, A gegeben sind, so findet man durch die Formel das Quadrat der dritten Seite, wovon die Wurzel positiv zu nehmen ist, weil bey den Seiten des Dreyecks die Betrachtung des negativen wegfällt. Für ein stumpfes A ist BD = BA + AD, der negative Theil der Gleichung wird daher positiv, wie er es auch wegen des negativen Wehrtes von cos. A wird.

Aus drey Seiten jeden der Winkel zu finden, dient eben diese Gleichung. Sie gibt

16) $\cos. A = \dfrac{bb + cc - aa}{2bc}$

Diese Gleichung muß nur noch zur Rechnung bequemer eingerichtet werden.

V.

Es ist $1 + \cos. A = \frac{bb + 2bc + cc - aa}{2bc}$

$= \frac{(b + c)^2 - aa}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$

und $1 - \cos. A = \frac{aa - bb + 2bc - cc}{2bc}$

$= \frac{aa - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$,

also (K. 1. VII.)

17) $(\cos. \frac{1}{2} A)^2 = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}$, und

18) $(\sin. \frac{1}{2} A)^2 = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}$

auch, weil $(1 + \cos. A)(1 - \cos. A) = 1 - (\cos. A)^2$ $= (\sin. A)^2$

19) $(\sin. A)^2 = (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)$. $(a - b + c) : 4bbcc$

VI.

Weil das Perpendikel $CD = b \sin. A$, so ist

20) $CD = \frac{\sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}}{2c}$

und das Segment der Grundlinie, welches an A liegt, $AD = b \cos. A$ oder

21) $AD = \frac{bb + cc - aa}{2c}$,

auch der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{2}$ AB . CD $= \frac{1}{2}$ bc sin. A, oder

22) Area $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c).(a-b+c)}$

VII.

Man schreibe in der 14ten Formel, cot. B $= \frac{c}{b \sin. A} - \frac{\cos. A}{\sin. A}$ für c : b seinen Wehrt sin. C : sin. B aus (13), so erhält man cot. B $= \frac{\cos. B}{\sin. B}$ $= \frac{\sin. C}{\sin. B \sin. A} - \frac{\cos. A}{\sin. A}$ und, wenn man mit sin. B. sin. A multiplicirt, cos. B. sin. A. $=$ sin. C $-$ cos. A. sin. B, oder

23) sin. C $=$ sin. A. cos. B. $+$ sin. B. cos. A welches die vierte der gesuchten Gleichungen, die zwischen den trigonometrischen Functionen der drey Winkel, ist.

Weil auf eben die Art, die Winkel C und A verwechselt, sin. A $=$ sin. C. cos. B $+$ sin. B. cos. C, so setze man in dieser leztern Gleichung für sin. C seinen Wehrt, und sie wird diese, sin. A $=$ sin. A (cs. B)^2 $+$ sin. B. cs. A. cs. B. $+$ sin. B. cos. C. $=$ sin. A $-$ sin. A (sin. B)^2 $+$ sin. B. cs. A. cs. B $+$ sin. B. cos. C oder o $= -$ sin. A. sin. B $+$ cos. A. cos. B $+$ cos. C oder

24) cos. C $=$ sin. A. sin. B. $-$ cos. A. cos. B welche Gleichung ein veränderter Ausdruck der erst gefundenen ist.

Die

Die vier gefundenen Gleichungen enthalten alles, was über die Verbindung von geraden Linien und Winkeln, die sich aus einander bestimmen, gesagt werden kan. Aus ihnen mus auch alles hergeleitet werden können, was man zur Bestimmung solcher Grössen braucht, die von jenen Linien und Winkeln unmittelbar abhängen, wie in VII. Perpendikel, Segment und Fläche waren, oder die aus allen diesen Grössen, auf welche Art es sey mit einander verbunden, zusammengesezt werden. Wenn die Lage und Grösse der Linien noch von andern Umständen abhängt, so wird man, um zu einer Vergleichung aller zusammengehörigen Grössen zu gelangen, diese Gleichungen mit den besondern Bestimmungen der Untersuchung zu verbinden haben.

VIII.

Zur Erläuterung des arithmetischen Gebrauchs der gefundenen Formeln dienen folgende Exempel.

1. Exempel. Es wird gegeben log. AB = 3,8976821, log. AC = 3,6752283, A = 40°. Man sucht den Winkel B. Die Rechnung ist diese:

l. b = 3,6752283
l. sin. A = 9,8080675

3,4832958 (1. Kap. VIII.)
l. c = 3,8976821

0,4143863 = log. 2,5964 +,
cot. 40° = 1,1917 +

tang. 54° 33′⅓ = 1,4047

und B = 35° 26′⅔

Wenn man mit den Tangenten selbst rechnet, so muß man in den Tafeln immer 7 Ziffern von der rechten Hand nach der Linken zu abschneiden, weil der beständige Nenner 10000000 ist. Bleibt noch eine oder mehrere Ziffern über, so sind dis ganze. Und umgekehrt, wenn man eine Tangente hat, die aus einer ganzen Zahl nebst anhängenden Decimalziffern besteht, so muß man in den Tafeln eine Tangente suchen, die diese ganze Zahl nebst 7 Decimalziffern dahinter enthalte, welche den gegebenen am nächsten kommen.

2tes Exempel. Man soll für eben diese Stükke die dritte Seite BC finden.

Aufl. Entweder suche man zuerst den Winkel B, und alsdenn AB durch (13), oder man bediene sich der Formel (15), welcher man aber zur Bequemlichkeit der Rechnung diese Gestalt zu geben hat, $aa = bc\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\cos. A\right)$, und die Rechnung wird folgendergestalt geführt.

$$lb = 3,6752283$$
$$lc = 3,8976821$$

$$l\frac{b}{c} = 9,7775462 = \log. \quad 0,5992$$

$$l\frac{c}{b} = 0,2224538 = \log. \quad 1,669$$

$$2,2682$$

$$\cos. 40^\circ = 0,76604$$

$$2\cos. 40^\circ = 1,53208$$

$$9,8669368 = \log. \quad 0,7361$$

$9,8669368 = \log.\ 0,7361$

$lbc = 7,5729104$

$laa = 7,4398472$

$la = 3,7199236 = \log.\ 5247 +$

Wenn man zuerst B gesucht hätte, so findet man a durch die Analogie sin. B : sin. A = b : a aus (13) wie folget.

$\log. b \sin. A = 3,4832958$

$l \sin B = 9,7633631$

$3,7199327 = \log.\ 5247 +$

Der Unterschied des Resultats entsteht daher, weil beyde Rechnungen nur Näherungen nach den gewöhnlichen Tafeln sind. Sie sind übrigens nach beiden Methoden gleich lang; doch scheint die nach (15) gemacht, genauer zu seyn. Denn nach der leztern Rechnung kömt es zu sehr auf die Richtigkeit des Winkels B an.

3. Exempel. Es ist gegeben a = 5247
b = 4734
man soll A finden. c = 7901

Aufl. Man verfahre nach (17), so ist

$b + c + a = 17882$

$b + c - a = 7388$

$\log.\ 17882 = 4,2524161$

$\log.\ 7388 = 3,8685269$

$8,1209430$

$\log.\ b = 3,6752283$

$\log.\ c = 3,8976821$

$\log.\ 4 = 0,6020600$

$\log. 4\,bc = 8,1749704$

$\log. cf.(\frac{1}{2}A)^2 = 9,9459726$

$\log. cf.\frac{1}{2}A = 9,9729863$

also $\frac{1}{2}A = 20°$, und $A = 40°$.

IX.

Aufgabe 1. Es ist gegeben $AB = c$, nebst den Winkeln A, B; (Fig. 5.) man soll $CD = p$ finden.

Aufl. Es ist aus (14) $\cot. B + \cot. A = \frac{c}{b\,\sin. A}$

$= \frac{c}{p}$, also $p = \frac{c}{\cot. B + \cot. A.}$

X.

Aufg. 2. Es wird gegeben die Summe der Seiten $a + b + c = q$, die Fläche des Dreyecks ss, und der Winkel A, man soll die Seiten und die übrigen Winkel finden.

Aufl. Wenn zwey Seiten b, c bekannt sind, so hat man $a = q - b - c$, und die Winkel. Diese Seiten zu finden, dienen die beyden Gleichungen

I. $ss = \frac{1}{2}bc\,\sin. A$

II. $(\cos. \frac{1}{2}A)^2 = \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{4bc}$ (17)

woraus man sieht, daß die gegebenen Grössen das Dreyeck bestimmen. Die Seite a findet sich gleich aus den beyden Gleichungen. Denn es ist

(cos.

$$(\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{q(q-2a)}{4bc} = \frac{q(q-2a)\ \text{sin.}\ A}{8ss}$$
$$= \frac{q(q-2a)\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}A\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}A}{4ss}$$ (1 Kap. VII); also $4ss\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}A = q(q-2a)\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}A$, oder
$$\frac{4ss\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A}{q} = q - 2a \text{ und } a = \tfrac{1}{2}q - \frac{2ss\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A.}{q}$$
Hieraus findet man $b + c = q - a = \tfrac{1}{2}q + \frac{2ss\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A.}{q}$

Man muß also noch $b - c$ suchen, so hat man sowohl b als c. Dieses findet man aus der Gleichung $(\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$ (18)

Man schreibe z für $b - c$, so ist $(\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}A)^2 =$
$$\frac{(a+z)(a-z)}{4bc} = \frac{(aa-zz)\text{sn.}A}{8ss} = \frac{(aa-zz)\text{sn.}\tfrac{1}{2}A.\text{cs.}\tfrac{1}{2}A}{4ss}$$
also $\frac{4ss\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}A}{\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}A} = 4ss\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A = aa - zz$

und $zz = aa - 4ss\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A$. Hieraus die Wurzel gezogen, und die Hälfte derselben zu $\tfrac{1}{2}(b+c)$ addirt, bekömt man b; subtrahirt man sie, so erhält man c.

Wenn A ein rechter Winkel ist, so ist $a = \tfrac{1}{2}q - \frac{2ss}{q}$;
$b + c = \tfrac{1}{2}q + \frac{2ss}{q}$; $(b-c)^2 = aa - 4ss.$

Daß

Daß z zwey gleiche entgegengesezte Wehrte bekömt, davon ist der Grund, weil b — c sowohl AC — AB, als AB — AC bedeuten kan. Denn es ist gleichgültig, welche von diesen beiden Linien man b und welche man c nennen will.

XI.

Aufg. 3. **Es wird gegeben die Summe der Seiten = q, die Höhe CD = p, die Grundlinie AB = c, man soll die übrigen Seiten finden.**

Aufl. Hiezu dient die Gleichung aus (20), $2cp = \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}$. Nun ist $q - c = b + a$ gegeben. Man setze also $b - a = z$, so hat man aus z sowohl b als a. Die angeführte Gleichung aber wird durch die Substitution dieser Grössen, und quadrirt,

$$4ccpp = q(c + z)(q - 2c)(c - z) = q(q - 2c)(cc - zz) \text{ oder } \frac{4ccpp}{q(q-2c)} = cc - zz,$$

und $zz = cc - \frac{4ccpp}{q(q-2c)}$.

Die Grösse z bekömt hier aus eben den Ursachen, wie in der vorhergehenden Aufgabe, zwey Wehrte. Die Seiten AC, BC verhalten sich gleichgültig gegen das Perpendikel CD, und es ist willkührlich, welche man b und welche man a nennen will.

XII.

Aufg. 4. Es wird gegeben BC = a mit dem gegenüberstehenden Winkel A, und die Summe der beiden übrigen Seiten $b + c = q$; man soll daraus die übrigen Seiten und Winkel bestimmen.

Aufl. Man suche den Unterschied $b - c = z$. Demnach wird die Gleichung (17) diese, $(\text{cos}.\frac{1}{2}A)^2 = \frac{(q + a)(q - a)}{4bc}$; und (18) wird, $(\text{sin}.\frac{1}{2}A)^2 = \frac{(a + z)(a - z)}{4bc}$. Die leztere durch die erstere dividirt, gibt $(\text{tang}.\frac{1}{2}A)^2 = \frac{aa - zz}{qq - aa}$; oder $(qq - aa)(\text{tang}.\frac{1}{2}A)^2 = aa - zz$, das ist $zz = aa - (qq - aa)(\text{tang}.\frac{1}{2}A)^2$. Die Hälfte der Wurzel dieses Quadrats zu $\frac{1}{2}q$ addirt oder davon subtrahirt, gibt die grössere oder kleinere Seite.

Wenn $A = 90°$, so ist $zz = 2aa - qq$

Aus den gefundenen Seiten findet man die Winkel durch (16). Die geometrische Betrachtung aber liefert diese unmittelbar, und auf eine sehr leichte Art. Denn man theile (Fig. 7.) den Winkel A durch AD in zwey gleiche Theile, so ist $BD : BA = \text{sin}.\frac{1}{2}A : \text{sin}.BDA$; und $DC : CA = \text{sin}.\frac{1}{2}A : \text{sin}.CDA$, also $BD : BA = DC : CA$ und $BD + DC : BA + CA = BD : BA = \text{sin}.\frac{1}{2}A : \text{sin}.BDA$ oder $\text{sin}.CDA$. Es ist aber $BDA = C + \frac{1}{2}A$, und $CDA = B + \frac{1}{2}A$, und die gefundene

fundene Analogie gibt daher die Gleichung BC. sin $(C + \frac{1}{2} A) = BC$. sin. $(B + \frac{1}{2} A) = (BA + CA)$. sin. $\frac{1}{2}$ A, woraus man, wenn A, BC, und BA + AC gegeben sind, den Winkel B oder C leicht findet.

Diese Analogie liegt zwar in den Gleichungen (13, 23.). Sie wird aber mühsamer daraus hergeleitet. Ueberhaupt ist zu merken, daß die Geometrie wegen der unmittelbaren Zusammensetzung der Winkel, die in der Rechnung nicht so leicht geschicht, sehr oft schöne Kunstgriffe zur Abkürzung der Rechnung an die Hand gibt. Um ein vollkommenes Exempel hievon zu haben, vergleiche man die geometrische Auflösung der Frage über die Bewegung von Körpern, deren eines auf die übrigen stößt, wie sie Maclaurin in seinem Werke über die Fluxionen §. 515 u. ff. gegeben hat, mit der bloß algebraischen eines weiteingeschränktern Falles dieser Frage von Joh. Bernoulli in seinen Werken T. III. p. 65. u. ff.

Aufg. 5. **In einem rechtwinklichten Dreyeck ist eine Kathete und die Summe der beyden übrigen Seiten gegeben; man soll diese Seiten finden.**

Aufl. In der Fig. 5. nehme man den Winkel A für einen rechten; $AB = c$, für die gegebene Kathete; $BC + AC = a + b = q$, für die gegebene Summe. Man nenne den Unterschied dieser Seiten $z = a - b$; so giebt die Gleichung (18) durch die (17) dividirt, $(\text{tang.} \frac{1}{2} A)^2 = 1$

=

$$= \frac{(c+q)(c-z)}{(q-c)(c+z)}$$ oder $(c+q)(c-z) = (q-c)$ $(c+z)$, das ist $cc = qz$ oder $z = \frac{cc}{q}$. Also wird die Hypotenuse $a = \frac{1}{2}(q+z) = \frac{qq+cc}{2q}$, und die andere Kathete, $b = \frac{1}{2}(q-z) = \frac{qq-cc}{2q}$. Diese Ausdrücke sind dienlich, eine Reihe von rechtwinklichten Dreyecken zu finden, deren Seiten alle rational sind, und die eine Kathete gemein haben.

Man kan dergleichen Aufgaben, wie hier vorgelegt sind, noch viel mehrere machen. Zum Theil möchten sie wohl nicht sehr brauchbar seyn; sie müssen sich aber alle aus den obigen Gleichungen auflösen lassen. Ueberhaupt hat man bey Erlernung der Mathematik zu bemerken, daß man sich nicht zu lange mit Untersuchung einzelner Sätze beschäftige, sondern die allgemeinen Gleichungen zu erhalten suche, worin die Verbindungen der zusammengehörigen Grössen dargestellt werden. Wenn man sich den Gebrauch dieser Gleichungen durch ihre Anwendung auf einige besondere Fälle geläufig gemacht hat, so braucht man nicht auf alle mögliche sich einzulassen, die man im vorkommenden Falle auch ohne fremde Hülfe aufzulösen im Stande seyn wird. Diese Methode erspart viel vergebliches Lesen.

Drittes Kapitel

Vergleichungen zwischen den trigonometrischen Functionen einfacher und zusammengesezter Winkel.

I.

Man bemerke, daß in der Formel (23) der sin. C sowohl der Sinus des innern als äussern Winkels C ist. (Fig. 5.) Es ist aber der äussere Winkel C = A + B, also ist sin. (A + B) = sin. A cos. B + sin. B. cos. A. Wenn man in eben dieser Formel unter A den äussern Winkel bey A versteht, so muß die Formel so geschrieben werden, sin. C = sin. A cos. B — sin. B cos. A, weil die Cosinus von Nebenwinkeln einander gleich und entgegengesezt sind. Alsdenn ist C = A — B und sin. (A — B) = sin. A. cos. B — sin. B. cos. A. Oder kurz, die leztere Formel wird aus der erstern, wenn man B negativ nimt, und das Zeichen seines Sinus ändert. (1 Kap. V.)

In der 24sten Formel bedeute C den äussern Winkel bey C, so muß man die Formel so ausdrücken — cos. C = sin. A sin. B — cos. A cos. B, oder cos. (A + B) = cos. A. cos. B — sin. A sin. B. Läßt man in eben dieser Formel A den äussern Winkel bedeuten, so wird sie diese, cos. C = sin. A. sin. B. + cos. A. cos. B, oder cs. (A — B) = cos. A. cos. B + sin. A. sin. B.

Die

Die Formeln, welche alle Lehrsätze über die Zusammensetzung der Winkel enthalten, sind demnach diese

25) $\sin.(A + B) = \sin. A. \cos. B + \sin. B. \cos. A$

26) $\sin.(A - B) = \sin. A. \cos. B - \sin. B. \cos. A$

27) $\cos.(A + B) = \cos. A. \cos. B - \sin. A. \sin. B$

28) $\cos.(A - B) = \cos. A. \cos. B + \sin. A. \sin. B$

Da die Formeln (23, 24) für alle Fälle gelten, wenn man die Zeichen gehörig ändert, so gilt eben dieses von den daraus hergeleiteten. (25-28)

II.

Man setze $A = B$, so wird aus (25) und (27)

29) $\sin. 2A = 2 \sin. A. \cos. A.$

30) $\cos. 2A = (\cos. A)^2 - (\sin. A)^2$

Man addire zu (30) die Gleichung $1 = (\sin. A)^2 + (\cos. A)^2$ so erhält man

31) $1 + \cos. 2A = 2 (\cos. A)^2$ und

32) $1 - \cos. 2A = 2 (\sin. A)^2$,

wenn man jene Gleichung subtrahirt.

Weil eben so $1 + \cos. 2B = 2 (\cos. B.)^2$, so wird aus (31) durch die Subtraction dieser Gleichung $\cos. 2A - \cos. 2B = 2 (\text{cs}. A)^2 - 2 (\text{cs}. B)^2$ oder

33) $\text{cs}. 2A - \text{cs}. 2B = 2 (\text{cs}. A + \text{cs}. B) (\text{cs}. A - \text{cs}. B)$

Und weil $1 - \cos. 2B = 2 (\sin. B)^2$, so folgt aus dieser Gleichung mit (32) verbunden, $\cos. 2A - \cos. 2B = 2 (\sin. B)^2 - 2 (\sin. A)^2$. oder

34) $\text{cs}. 2A - \text{cs}. 2B = 2 (\text{sn}. B + \text{sn}. A) (\sin. B - \sin. A)$

III.

Die Formeln (25, 27) durch einander dividirt, geben

$$\frac{\text{sin.}(A \pm B)}{\text{cos.}(A \pm B)} = \text{tg.}(A \pm B) = \frac{\text{sn.A.cs.B} \pm \text{sn.B.cs.A}}{\text{cs.A.cs.B} - \text{sn.A.sn.B}}$$

und wenn man Zähler und Nenner mit cs.A.cs.B dividirt, und tang. A für $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$, tang. B für $\frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}$ schreibt.

35) $\text{tang.}(A \pm B) = \frac{\text{tang. A} \pm \text{tang. B}}{1 - \text{tang. A. tang. B}}$

Eben so wird aus (26, 28) durch die Verwechselung der Zeichen

36) $\text{tang.}(A - B) = \frac{\text{tang. A} - \text{tang. B}}{1 \pm \text{tang. A. tang. B}}$

Daher, wenn A = B,

37) $\text{tang. } 2A = \frac{2 \text{ tang. A}}{1 - (\text{tang. A})^2}$

Aus (31, 32) folgt durch die Division

38) $(\text{tang. A})^2 = \frac{1 - \text{cos. } 2A}{1 \pm \text{cos. } 2A}$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit 1 — cs. 2 A, so hat man $(\text{tang. A})^2 = \frac{(1 - \text{cos. } 2A)^2}{1 - (\text{cos. } 2A)^2}$, oder

39) $\text{tang. A} = \frac{1 - \text{cos. } 2A}{\text{sin. } 2A}$

Hätte man mit 1 ± cos. 2 A multiplicirt, so bekäme man

40) $\text{tang. A} = \frac{\text{sin. } 2A}{1 \pm \text{cos. } 2A}$

Wenn

Wenn A = 45°, also tang. A = 1, so ist

$$41)\ \text{tang.}(45° \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang.B}}{1 \mp \text{tang.B}} = \frac{\text{cs.B.} \pm \text{sn.B}}{\text{cs.B} \mp \text{sn.B}}$$

wenn man mit cos. B Zähler und Nenner multipliciret, und für cos. B. tang. B seinen Wehrt sin. B (3) schreibt.

IV.

Aus den Formeln (25 = 28) entstehen durch die Addition und Subtraction folgende.

$$42)\ \text{sin.}(A + B) + \text{sin.}(A - B) = 2\,\text{sn. A. cs. B}$$

$$43)\ \text{sin.}(A + B) - \text{sin.}(A - B) = 2\,\text{cs. A. sn. B}$$

$$44)\ \text{cos.}(A + B) + \text{cos.}(A - B) = 2\,\text{cs. A. cs. B}$$

$$45)\ \text{cos.}(A - B) - \text{cos.}(A + B) = 2\,\text{sn. A. sn. B}$$

Man schreibe a für A + B, b für A — B, woraus a + b = 2A, a — b = 2B wird, und die zulezt gefundenen Formeln verwandeln sich in diese

$$46)\ \text{sin.a} + \text{sin.b} = 2\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a + b).\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$47)\ \text{sin.a} - \text{sin.b} = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(a + b).\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$48)\ \text{cos.a} + \text{cos.b} = 2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(a + b).\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$49)\ \text{cos.b} - \text{cos.a} = 2\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a + b).\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(a - b)$$

V.

Aus diesen folgt durch die Division

$$50)\ \frac{\text{sin. a} + \text{sin. b}}{\text{cos. a} + \text{cos. b}} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(a + b)$$

$$51)\ \frac{\text{sin. a} - \text{sin. b}}{\text{cos. a} + \text{cos. b}} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$52)\ \frac{\text{sin. a} - \text{sin. b}}{\text{cos.b} - \text{cos.a}} = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(a + b)$$

53) $\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{1}{2}(a - b)$

und aus diesen wiederum durch die Division

54) $\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} = \frac{\tan g. \frac{1}{2}(a + b)}{\tan g. \frac{1}{2}(a - b)}$

55) $\frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. a + \cos. b} = \frac{\tan g. \frac{1}{2}(a + b)}{\cot. \frac{1}{2}(a - b)}$

$= \tan g. \frac{1}{2}(a + b) \tan g. \frac{1}{2}(a - b)$ oder

$\frac{\cos. a - \cos. b}{\cos. a + \cos. b} = \tan g. \frac{1}{2}(a + b). \tan g. \frac{1}{2}(b - a)$

VI.

Wenn man in den Formeln (50-53) für a und b ihre Wehrte wieder zurückschreibt, so erhält man durch die Addition und Subtraction, für cos. b ± cos. a seinen Wehrt aus (48, 49) gesezt, folgende Formeln

56) $\tan g. A + \tan g. B = \frac{\sin. (A + B)}{\cos. A. \cos. B}$

57) $\tan g. A - \tan g. B = \frac{\sin. (A - B)}{\cos. A. \cos. B}$

58) $\cot. A + \cot. B. = \frac{\sin. (A + B)}{\sin. A. \sin. B}$

59) $\cot. B - \cot. A = \frac{\sin. (A - B)}{\sin. A. \sin. B}$

Aus diesen folgt wieder durch die Division

60) $\frac{\tan g. A + \tan g. B}{\tan g. A - \tan g. B} = \frac{\sin. (A + B)}{\sin. (A - B)}$

61)

61) $$\frac{\cot. A + \cot. B}{\cot. B - \cot. A} = \frac{\sin.(A + B)}{\sin.(A - B)}$$

62) $$\frac{\tang. A + \tang. B}{\cot. A + \cot. B} = \tang. A. \tang. B$$

63) $$\frac{\tang. A - \tang. B}{\cot. B - \cot. A} = \tang. A. \tang. B$$

Aus (27, 28) folgt noch

64) $$\frac{\cos.(A + B)}{\cos.(A - B)} = \frac{\cot. A - \tang. B}{\cot. A + \tang. B}$$
$$= \frac{\cot. B - \tang. A}{\cot. B + \tang. A},$$

nachdem man den zweyten Theil dieser Gleichungen mit $\sin. A. \cos. B$ oder mit $\sin. B. \cos. A$ dividirt.

VII.

Man schreibe in der Formel (42), $\sin.(A + B) = 2 \sin. A. \cos. B - \sin.(A - B)$, b für B, und für A folgweise, a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, etc., so bekomt man für die Sinus von Winkeln, die in arithmetischer Progreßion sind, folgende Fortschreitung.

65) $\sin a = \sin. a$

$\sin.(a + b) = 2 \cos. b. \sin. a - \sin.(a - b)$

$\sin.(a + 2b) = 2 \cos. b. \sin.(a + b) - \sin. a$

$\sin.(a + 3b) = 2 \cos. b. \sin.(a + 2b) - \sin.(a + b)$

$\sin.(a + 4b) = 2 \cos. b. \sin.(a + 3b) - \sin.(a + 2b)$

$\sin.(a + 5b) = 2 \cos. b. \sin.(a + 4b) - \sin.(a + 3b)$

\- - - - - - -

$\sin.(a + nb) = 2 \cos. b. \sin.(a + (n-1)b) - \sin.(a + (n-2)b)$

VIII.

Eben so verfahre man mit (44), $\cos.(A+B) = 2\cos.A.\cos.B - \cos.(A-B)$, so erhält man die Cosinus dieser Winkel

66) $\cos. a = \cos. a$

$\cos.(a+b) = 2\cos.b.\cos.a - \cos.(a-b)$

$\cos.(a+2b) = 2\cos.b.\cos.(a+b) - \cos.a$

$\cos.(a+3b) = 2\cos.b.\cos.(a+2b) - \cos.(a+b)$

$\cos.(a+4b) = 2\cos.b.\cos.(a+3b) - \cos.(a+2b)$

$\cos.(a+5b) = 2\cos.b.\cos.(a+4b) - \cos.(a+3b)$

- - - - - -

$\cos.(a+nb) = 2\cos.b.\cos.(a+(n-1)b) - \cos.(a+(n-2)b)$

IX.

Hieraus lassen sich die Sinus und Cosinus von Winkeln, welche in arithmetischer Progreßion fortgehen, bequem berechnen. Sie machen eine rücklaufende Reihe (seriem recurrentem) aus, deren Verhältnisleiter (scala relationis) diese $2\cos.b; -1$, ist, das heißt, um einen Sinus oder Cosinus aus dieser Reihe zu finden, muß man den nächstvorhergehenden mit $2\cos.b$, dem doppelten Cosinus des gemeinschaftlichen Unterschiedes, und den zweyten vorhergehenden mit -1 multipliciren, und daraus eine Summe machen.

Die Reihe der Winkel kan steigen oder fallen. In dem leztern Falle muß b negativ genommen werden; und das Gesez der Fortschreitung bleibt unverändert. Es ist z. E. in (65) $\sin.(a+3b) = 2\cos.b.\sin.(a+4b) - \sin.(a+5b)$ und in (66), $\cos.(a+3b) = 2\cos.b.\cos.(a+4b) - \cos.(a+5b)$

Exem-

Exempel. Man habe aus der Seite des Sechsecks den sin. 30° und daraus sin. 15° (32) wie auch aus der Seite des Fünfecks den sin. 36° und daraus sin. 18°, aus beiden den sin. 3° ihres Unterschiedes (26) und die Cosinus dieser Winkel berechnet, so kan man daraus die Sinus und Cosinus von 21°, 24°, 27°, etc. wie auch 12°, 9°, 6° finden.

$$\begin{array}{ll} \text{l. sin. } 18^\circ & = 9,4899824 \\ \text{l. cos. } 3^\circ & = 9,9994044 \\ \text{l. } 2 & = 0,3010300 \\ \hline & 9,7904168 = \text{l. } 0,6172 \\ & \text{sin. } 15^\circ = 0,2588 \\ \hline & \text{sin. } 21^\circ = 0,3584 \end{array}$$

X.

Die Summe der Sinus von Winkeln, die in arithmetischer Progreßion sind,

$sn.\, a + sn.(a + b) + sn.(a + 2b) \ldots + sn.(a + nb)$ zu finden, bezeichne man diese Summe durch s, so ist aus (65), wenn man die dortigen Gleichungen zusammennimt,

$$s = \sin. a + 2 \cos. b.(s - sn.(a + nb)) - sn.(a - b)$$
$$-(s - \sin.(a + nb) - \sin.(a + (n-1)b)); \text{ oder}$$
$$2s - 2s\, cs.b = sn.a - sn.(a - b) - 2\, cs.b.sn.(a + nb)$$
$$+ sn.(a + nb) + sn.(a + (n-1)b), \text{oder aus } (65)$$
$$2s(1 - cs.b) = sn.a - sn.(a - b) + \sin.(a + nb)$$
$$- sn.(a + (n+1)b)$$
$$= 2cs.(a - \tfrac{1}{2}b) sn.\tfrac{1}{2}b - 2cs.(a + (n + \tfrac{1}{2})b).sn.\tfrac{1}{2}b \; (47)$$

und mit $2(1 - cs.b) = 4(sn.\tfrac{1}{2}b)^2$ (32) dividirt,

$$s = \frac{cf.(a - \frac{1}{2}b) - cf.(a + (n + \frac{1}{2})b)}{2\,\sin.\frac{1}{2}b}, \text{ oder (49)}$$

$$67)\ s = \frac{\sin.(a + \frac{1}{2}nb).\ \sin.\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin.\frac{1}{2}b}.$$

Wenn man die Summe aller Sinus ins unendliche fort berechnen will, oder wenn n ohne Ende groß genommen wird, so ist es gleichgültig, ob man s, oder $s - \sin.(a + nb)$, oder $s - \sin.(a + nb) - \sin.(a + (n-1)b)$ für die Summe nehmen will, weil die Anzahl dieser Sinus unbestimmt groß ist. Daher wird $s = \sin.a + 2s\,\cos.b - \sin.(a-b) - s$ oder $2s - 2s\,\cos.b = \sin.a - \sin.(a-b) = 2\,\cos.(a - \frac{1}{2}b)\,\sin.\frac{1}{2}b$, (47) oder

$$68)\ s = \frac{\cos.(a - \frac{1}{2}b)}{2\,\sin.\frac{1}{2}b}.$$

Daß die Summe einer unendlichen Menge Sinus endlich ist, rührt daher, weil unter diesen ein Theil negativ sind.

XI.

Die Summe der Cosinus $cf.a + cf.(a+b) + \cos.(a+2b) \ldots + cf.(a+nb) = s$ zu finden, verfahre man eben so, wie für die Sinus, und es ist aus (66)

$$s = \cos.a + 2\,cf.b.\,(s - cf.(a+nb) - cf.(a-b) - (s - cf.(a+nb) - cf.(a+(n-1)b))), \text{ oder}$$

$$2s(1 - \cos.b) = \cos.a - \cos.(a-b) + \cos.(a+nb) - \cos.(a+(n+1)b)$$

$$= -2\,\mathrm{fn}.(a - \tfrac{1}{2}b).\,\mathrm{fn}.\tfrac{1}{2}b + 2\,\mathrm{fn}.(a + (n+\tfrac{1}{2})b).\,\mathrm{fn}.\tfrac{1}{2}b$$

folg-

folglich $s = \frac{\sin.(a + (n + \frac{1}{2})b) - \sin.(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin.\frac{1}{2}b}$, oder

69) $s = \frac{\cos.(a + \frac{1}{2}nb).\ \sin.\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin.\frac{1}{2}b}$.

Wollte man die Summe aller Cosinus ohne Ende fort haben, so ist, wie in X.

$s = \cos.a + 2s\cos.b - \cos.(a-b) - s$, oder

$2s(1 - \cos.b) = \cos.a - \cos.(a-b) = -2\sin.(a - \frac{1}{2}b).\sin.\frac{1}{2}b$, und

70) $s = -\frac{\sin.(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin.\frac{1}{2}b}$.

XII.

In der Formel (54) ist die Regel enthalten, welche gewöhnlich gelehrt wird, um aus zwey Seiten eines Dreyecks mit dem eingeschlossenen Winkel jeden der beyden übrigen Winkel zu finden. In dem Dreyeck ABC (Fig. 5) seyn AC=b, AB=c, und A gegeben, man sucht B und C. Nun ist aus (13) $c : b = \sin.C : \sin.B$, folglich $c + b : c - b = \sin.C + \sin.B : \sin.C - \sin.B$, oder $c + b : c - b = \tang.\frac{1}{2}(C + B) : \tang.\frac{1}{2}(C - B)$ (54). Durch diese Analogie findet man den Unterschied der Winkel B, C, also aus diesem und der bekannten Summe die Winkel selbst. Diese Auflösung ist bequem, wenn man die Seiten selbst weiß; wenn aber ihre Logarithmen gegeben sind, so wird sie mühsam und unsicher, wenn man nicht Logarithmen und Zahlen genau sucht. Für diesen Fall kan man der gefundenen Analogie aus

(38) eine bequemere Gestalt geben. Man drücke sie so aus: $1 + \frac{b}{c} : 1 - \frac{b}{c} = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C + B)$: tang. $\frac{1}{2}(C - B)$, und nehme in der angeführten Formel, $(\text{tang.}\ \alpha)^2 = \frac{1 - \text{cos.}\ 2\alpha}{1 + \text{cos.}\ 2\alpha}$ den cos. 2α $= \frac{b}{c}$ so wird die Analogie diese, $1 : (\text{tang.}\ \alpha)^2$ $= \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C - B)$ und 2 log. tang. α + log. tang. $\frac{1}{2}(C+B)$ = log. tg. $\frac{1}{2}(C-B)$. Man muß also den Winkel suchen, dessen Cosinus $\frac{b}{c}$ ist, welches wegen der gegebenen Logarithmen von b und c leicht geschicht; von diesem Winkel nehme man die Hälfte, und addire den doppelten Logarithmen ihrer Tangente zu dem Logarithmen der Tangente von $\frac{1}{2}(C + B)$ so hat man den Logarithmen der Tangente von $\frac{1}{2}(C - B)$.

Oder man kan auch die Formel (41), tg. $(45^\circ - \beta)$ $= \frac{1 - \text{tang.}\ \beta}{1 + \text{tang.}\ \beta}$ gebrauchen.

Man setze nemlich tang. $\beta = \frac{b}{c}$, so wird 1: tg. $(45^\circ - \beta) = \text{tg.}\ \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C - B)$ und log. tang $(45^\circ - \beta)$ + log. tang. $\frac{1}{2}(C + B)$ = log. tang. $\frac{1}{2}(C - B)$.

Exempel.

Exempel. Es ist gegeben lb = 3,6752283
lc = 3,8976821
A = 40°

$l\frac{b}{c} = 9,7775462 = \log.\cos.\ 53^\circ\ 11'\ 24''$

$\alpha = 26\quad 35\quad 42$

log. tang. α = 9,6995373   C+B = 140°

2 log. tang. α = 9,3990746 $\frac{1}{2}$(C+B) = 70
log. tang. 70° = 10,4389341

9,8380087 = lg. tg. 34° $33\frac{1}{4}'$
70

C = 104° $33'\frac{1}{4}$
B = 35 $26\frac{3}{4}$

Oder

$l\frac{b}{c} = 9,7775462 = \log.\text{tang}.\ 30^\circ\ 55'\ 43''$
45

ltg. 14° 4′ 17″ = 9,3990708   14 4 17
ltang. 70° = 10,4389341

9,8380049 = log. tg. 34° $33'\frac{1}{4}$

u. s. w. wie vorher.

Die beiden lezten Zifern in den Logarithmen kommen zwar nicht überein. Ihr Unterschied gibt aber etwa eine Secunde nur für den Winkel. Bei der erstern Rechnung ist α ein wenig zu groß, bei der zweiten 45° — β ein wenig zu klein genommen. Auch ist bey des lezten Winkels Tangente die bloß mit den ersten Differenzen gemachte Interpolation nicht genau genug.

Viertes

Viertes Kapitel

Ueber die trigonometrischen Functionen vielfacher Winkel.

I.

Zum Gebrauche der gleich vorzunehmenden Untersuchung haben wir folgende Betrachtungen aus der Analysis nöthig.

Man formire aus einer Reihe gleicher Grössen a, und einer zweyten b, durch die beständige Hinzuthuung der Grösse a, eine arithmetische Reihe; aus dieser durch die beständige Addition je zweyer nächster Glieder und einer dritten Grösse c, eine neue Reihe; aus dieser wiederum auf eine ähnliche Art, eine vierte Reihe; und so immer fort, so viel man will. Man sucht den allgemeinen Ausdruck eines unbestimten Gliedes dieser Reihen.

Diesen zu finden, formire man erst einige dieser Reihen würklich, wie folgende Tabelle zeiget.

Man

	I.	II.	III.	IV.
1	a	b	c	d
2	a	$b + a$	$c + b$	$d + c$
3	a	$b + 2a$	$c + 2b + a$	$d + 2c + b$
4	a	$b + 3a$	$c + 3b + 3a$	$d + 3c + 3b + a$
5	a	$b + 4a$	$c + 4b + 6a$	$d + 4c + 6b + 4a$
6	a	$b + 5a$	$c + 5b + 10a$	$d + 5c + 10b + 10a$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
m	a	$b + \frac{(m-1)a}{1}$	$c + \frac{(m-1)}{1} b + \frac{(m-1)(m-2)a}{1.\ 2.}$	$d + \frac{(m-1)}{1} c + \frac{(m-1)(m-2)b}{1.\ 2.} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.\ 2.\ 3.}$

Man bemerkt hiebey sehr leicht, daß die Coefficienten derselben Grösse, a, oder b, oder c, etc. in jeder Reihe nach dem Gesetze der Binomialcoefficienten formirt werden, welches dieses ist. Wenn für die Potenz $(a+b)^{m-1}$ die Reihe derselben ist, 1, A, B, C, D, etc. so ist sie für $(a+b)^m$, die nächst höhere Potenz, diese, 1, (1+A), (A+B), (B+C), (C+D) etc.* So ist auch der Coefficient von a in jeder Reihe die Summe der Coefficienten von a aus dem nächstvorhergehenden Gliede derselben und der nächstniedrigern Reihe. In der Reihe I sind die Coefficienten von a jeder = 1; wie das für alle Potenzen beständige erste Glied in der Reihe der Coefficienten 1, A, B, C, etc. durch die beständige Addition dieser Eins entsteht die Folge der Coefficienten in der Reihe II. wie die Folge der Coefficienten A, (1+A), für die Folge der binomischen Potenzen mit ganzen bejahten Exponenten. Beyde Folgen sind also dieselben. Durch die fortgesezte Addition dieser Coefficienten entsteht in der Reihe III. die Folge der Coefficienten von a, wie die der Binomialcoefficienten B, (A+B), und daher sind beide wieder dieselben. Eben dis gilt von allen folgenden Reihen. Die Binomialcoefficienten für die Potenz $(a+b)^{m-1}$ sind, ausser der Eins, $A = m-1$, $B = \frac{(m-1)}{1.}\frac{(m-2)}{2.}$,

$C = \frac{(m-1)}{1.}\frac{(m-2)}{2.}\frac{(m-3)}{3.}$, etc.** In dem nten

* S. Kästners Analysis endlicher Grössen §. 123.

** S. Kästner a. a. O. §. 144.

mten Gliede der Reihe II. hat a den Coefficienten m — 1, weil in der Reihe I. so viel Glieder, jedes = a, vorhergehen; also hat es in der Reihe III den Coefficienten B, in der Reihe IV, den Coefficienten C u. s. w. Von den Coefficienten der Grössen b, c, d, etc. gilt eben dasselbe, was izt für a erwiesen ist, man muß nur die Reihen von derjenigen an zu zählen anfangen, wo sie zuerst vorkommen. Die allgemeinen Ausdrücke eines unbestimten Gliedes der formirten Reihen sind daher die, welche in der Tabelle angegeben sind.

Die Reihen I. II. sind die gewöhnlichen arithmetischen, die III. ist eine arithmetische der zweyten Ordnung, die IV. der dritten Ordnung. u. s. w.

II.

Wenn die Grössen b, c, d etc. alle = o sind, und die Stelle jedes Gliedes einer Reihe von dem ersten Gliede gezählt wird, das nicht = o ist, so muß man in dem allgemeinen Ausdruck des mten Gliedes der Reihe II, für m schreiben m + 1, weil daselbst das (m + 1)te Glied das mte wird, wenn man b wegläßt. In der Reihe III schreibt man m + 2 für m, weil zwey Glieder weggelassen werden, u. s. w. Also wird das mte Glied der Reihe

I. a

II. $\frac{ma}{1}$

III. $\frac{(m+1)\,ma}{1.\ 2}$

IV. $\frac{(m+2)\,(m+1)\,ma}{1.\ 2.\ 3}$

V. $\frac{(m+3)\,(m+2)\,(m+1)\,ma}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

etc. etc.

III.

Wären aber nur c, d, etc. = 0, so ist, auf eben die Art gezählt, das mte Glied der Reihe

I. a

II. $b + \frac{(m-1)a}{1}$

III. $\frac{mb}{1} + \frac{m\,(m-1)\,a}{1.\ 2}$

IV. $\frac{(m+1)\,mb}{1.\ 2} + \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,a}{1.\ 2.\ 3}$

V. $\frac{(m+2)(m+1)mb}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)a}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

VI. $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)mb}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)\,m\,(m-1)a}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

etc. etc.

IV.

Wenn die Anfangsglieder zwar = 0 sind, aber die für sie gesezten Nullen mitgezählt werden, so ist das mte Glied jeder Reihe die Summe von

den

den ersten m—1 Gliedern der nächstniedrigern, wie aus der Construction der Reihen offenbar ist.

Wenn sie aber nicht mitgezählt werden, so tritt das (m+1)te Glied dadurch in die Stelle des mten, und da vorher das (m+1)te Glied die Summe von m Gliedern der nächstniedrigern Reihe war, so ist izt das mte Glied dieser Summe gleich.

V.

Die m Glieder einer Reihe sind in dem leztern Falle m Summen, welche man von m Gliedern der vorhergehenden Reihe machen kan, wenn man ihrer m, m—1, m—2, etc. Glieder vom Anfange gerechnet zusammen nimt. Das mte Glied der nächsthöhern Reihe ist die Summe dieser Summen. Dieses Glied durch die Glieder der zweyten nächstvorhergehenden Reihe auszudrükken, bezeichne man die Glieder dreyer nächster in der Tabelle vertikaler Reihen allgemein durch Buchstaben, wie folget.

$$\begin{array}{l} T, S, R, Q \;.\;.\;.\; C, B, A. \\ t, s, r, q \;.\;.\;.\;.\;.\; b, a. \\ t', s' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a'. \end{array}$$

wo A, a, a' die ersten Glieder drey nächster Reihen, T, t, t' jedes in seiner Reihe das mte Glied sind. Nun ist

$$\begin{array}{l} t = T + S + R + Q + \;.\;.\;.\; + B + A. \\ s = \quad S + R + Q + \;.\;.\;.\; + B + A. \\ r = \qquad R + Q + \;.\;.\;.\; + B + A. \\ q = \qquad\quad Q + \;.\;.\;.\; + B + A. \\ \text{etc.} = \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}$$

 und

und

$t' = t \mp s \mp r \mp q \mp \ldots b \mp a.$

Also ist $t' = T \mp 2S \mp 3R \mp 4Q \mp \ldots \mp (m-1)B \mp mA$ Oder, das mte Glied jeder Reihe ist die Summe der Producte, aus m Gliedern der zweyten nächstvorhergehenden vom Ende an genommen, in die correspondirenden Glieder der Reihe 1, 2, 3, 4 -- m multipliciret.

Umgekehrt, wenn T, S, R etc. die Glieder einer arithmetischen Reihe jeder Ordnung sind, und es ist $t' = T \mp 2S \mp 3R \mp$ etc. so ist t' in der zweyten folgenden höhern Reihe das sovielte Glied, als es T in seiner ist.

VI.

Man setze nun in (65), $a = b = z$, und sin. z $= x$; cos. z $= y$, so hat man für die Sinus der vielfachen von z folgende Fortschreitung.

71) sin. z $= x$

sin. 2z $= 2xy$

sin. 3z $= 4xy^2 - x$

sin. 4z $= 8xy^3 - 4xy$

sin. 5z $= 16xy^4 - 12xy^2 + x$

sin. 6z $= 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy$

sin. 7z $= 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x$

sin. 8z $= 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy$

etc. = etc.

VII.

Das allgemeine Gesetz, nach welchem die Coefficienten in dem Ausdruck des Sinus eines unbestimten

stimten Vielfachen von z, $\sin. nz = Axy^{n-1} - Bxy^{n-3} + Cxy^{n-5} - Dxy^{n-7} + etc.$, formirt werden, zu entdecken, bezeichne man die Coefficienten aus zwey nächsten Vertikalreihen in (71) allgemein durch Buchstaben, und schreibe sie, so wie da, neben einander, daß die Coefficienten, welche zu dem Sinus von einerley vielfachen von z gehören, gegen einander über zu stehen kommen. Die untersten mögen zu sin. mz gehören.

$+ T, - t$
$+ S, - s$
$+ R, - r$
$+ Q, - q$
$+ P, - p$

Also ist nach dem (3 Kap. VIII.) bemerkten Gesetz, $p = R + 2q = R + 2S + 4r = R + 2S + 4T + 8t$ u. s. w. oder, es ist jeder Coefficient in dem Ausdruck für sin. mz die Summe der Producte aus den Coefficienten in der nächstvorhergehenden Vertikalreihe, von dem für sin. (m - 2) z an, in die correspondirenden Glieder der Reihe $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$, 2c.

Wenn R der erste Coefficient in seiner Reihe ist, so ist p der erste in der nächstfolgenden, und es ist $p = R$. Daher sind die Anfangsglieder aller Reihen einander gleich. Weil die erste Reihe für sin. z anfängt, so fängt die zwente für sin. 3z die dritte für sin. 5z, und die rte für sin. (2r - 1) z an. Der Coefficient des lezten Gliedes in dem

Ausdrucke des nemlichen Sinus ist daher entweder das erste oder das zweyte Glied in seiner Reihe.

Jede vertikale Reihe der Coefficienten enthält daher auch zwey Glieder weniger als die vorhergehende, wenn man sie bis zu dem Sinus des nemlichen Vielfachen von z herunter rechnet. Also ist das mte Glied jeder Reihe die Summe der Producte aus den m ersten Gliedern der vorhergehenden Reihe, von dem lezten angefangen, in die correspondirenden Glieder der Reihe, $2^0, 2^1, 2^2 \dots 2^{m-1}$.

Diese Glieder sind für die erste Reihe von Coefficienten, wie in die Augen fällt, folgende $2^{m-1}, 2^{m-2}, 2^{m-3} \dots 2^2, 2^1, 2^0$, welche in die correspondirenden Glieder der Reihe, $2^0, 2^1, 2^2, \dots 2^{m-3}, 2^{m-2}, 2^{m-1}$, multiplicirt, jedesmal das Product 2^{m-1} geben. Die Summe dieser Producte, deren an der Zahl m sind, ist $m.2^{m-1}$, welches das mte Glied in der zweyten vertikalen Reihe der Coefficienten ist.

Die zweyte Reihe enthält also, wie die erste, in ihren Gliedern, von dem mten an gerechnet bis zu Anfang, als Factoren folgweise die Potenzen

$$2^{m-1}, 2^{m-2}, \dots 2^1, 2^0,$$

welche in die correspondirenden Glieder der Reihe,

$2^0, 2^1, \ldots 2^{m-2}, 2^{m-1},$

multipliciret, jedesmal zum Producte 2^{m-1} geben, welches ein Factor des mten Gliedes in der dritten Reihe der Coefficienten wird. So enthält in allen folgenden Reihen das mte Glied immer den Factor 2^{m-1}.

Den dazu gehörigen Factor zu finden, muß man die Factoren, die zu den Potenzen,

$2^{m-1}, 2^{m-2}, \ldots 2^1, 2^0,$

in jeder Reihe gehören, summiren.

Diese Summe ist für das mte Glied der zweyten Reihe, $=m$. Der mte Coefficient in dieser Reihe ist also $m.2^{m-1}$, und die Factoren, die zu den Potenzen der Zwey in dieser Reihe gehören, sind von unten auf, $m, m-1, m-2 \ldots 1$.

Ihre Summe ist $\frac{(m+1)m}{1.2}$, (II. dies. Kap.) wenn daselbst $a=1$ gesezt wird. (IV. dess.) Der mte Coefficient in der dritten Reihe ist also $\frac{(m+1)m}{1.2}.2^{m-1}$, und die Factoren, die zu den Potenzen der Zwey gehören, sind, $\frac{(m+1)m}{1.2}$, $\frac{m(m-1)}{1.2} \ldots \frac{2.1}{1.2}$. Ihre Summe ist $\frac{(m+2)(m+1)m}{1.2.3}$, (eb. das.) und der mte Coef-

ficient in der vierten Reihe ist $\frac{(m+2)(m+1)m}{1\,.\,2\,.\,3}$ 2^{m-1}. Eben so wird er in der fünften Reihe $\frac{(m+3)(m+1)(m+1)m}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cdot 2^{m-1}$, u. s. w.

Aber um die Coefficienten zu haben, die zu dem Ausdruck des nemlichen Sinus gehören, muß man in dem aus der zweyten Reihe für m schreiben m — 2, und für die aus den folgenden Reihen nach ihrer Ordnung m — 4, m — 6, m — 8 statt m, weil iede Reihe bis auf denselben Sinus, den sin. nz, herunter, zwey Glieder weniger hat, als die vorhergehende. Für den ersten Coefficienten ist m = n; also wird, n für m gesezt,

$$A = 2^{n-1}$$

$$B = \frac{(n-2)}{1} 2^{n-3}$$

$$C = \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} 2^{n-5}$$

$$D = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{n-7}$$

$$E = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 2^{n-9}$$

etc. etc.

und

72) $\sin. nz = x\left(2^{n-1}y^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} 2^{n-3}y^{n-3}\right.$

$+ (n-3)$

$$\pm \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} 2^{n-5} y^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{n-7} y^{n-7}$$

$$\pm \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} 2^{n-9} y^{n-9} - \ldots$$

$$\pm \frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r} 2^{n-2r-1} y^{n-2r-1}$$

$$\mp \text{etc.})$$

Wenn $n = 2r + 1$, so wird das allgemeine Glied $= 1$, und das lezte Glied der Reihe für sin. nz ist $\pm x$, wo das obere Zeichen gilt, wenn r sich durch zwey, oder $n - 1 = 2r$, sich durch vier dividiren läßt; das untere im gegenseitigen Falle. Wenn $n = 2r$, so wird das allgemeine Glied $= 0$, das nächstvorhergehende ist

$$\mp \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.(r-1)} (2y)^{n-2r+1}$$

$= \mp r.2y = \mp ny$, und das lezte Glied der Reihe für sin. nz ist $\mp nxy$, wo das obere Zeichen gilt, wenn $r - 1$ ungerade, oder r gerade ist, d. i. wenn n sich durch vier dividiren läßt.

VIII.

Wenn man in diesen Formeln (71 . 72) für y seinen Wehrt $\sqrt{(1 - xx)}$ sezt, so erhält man eine Gleichung für den Sinus des vielfachen Winkels durch den Sinus des einfachen. Hier sind aber die beiden Fälle, ob die Exponenten von y gerade

oder ungerade sind, zu unterscheiden. Es sey zuerst n ungerade. Man setze in (65) $a=z$, $b=2z$, so hat man $\sin.(2n+1)z = 2\,cs.\,2z.\sin.(2n-1)z - \sin.(2n-3)z$, oder, weil $cs.\,2z = 1 - 2(\sin.z)^2$
(32) $\sin.(2n+1)z = (2-4\sin z^2)\sin.(2n-1)z - \sin.(2n-3)z$. Die Sinus ungerader Vielfacher von z formiren also eine Progreßion, deren Verhältnisleiter $2-4xx; -1$ ist. Demnach ist

73) $\sin.z = x$

$\sin.3z = 3x - 4x^3$

$\sin.5z = 5x - 20x^3 + 16x^5$

$\sin.7z = 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7$

$\sin.9z = 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9$.

etc. etc.

IX.

Die Coefficienten in dem Wehrte $\sin.nz = Ax - Bx^3 + Cx^5 - Dx^7 +$ etc. für ein ungerades n durch n allgemein auszudrücken, schreibe man wiederum die Coefficienten aus zwey nächsten Vertikalreihen wie in (VII) neben einander.

$+T, -t$

$+S, -s$

$+R, -r$

$+Q, -q$

$+P, -p$

So ist nach dem vorgeschriebenen Gesetz der Formation $p = 4Q + 2q - r = 4Q + 2(4R + 2r - s) - r = 4Q + 8R + 3r - 2s = 4Q + 8R + 3(4S + 2s - t) - 2s = 4Q + 8R + 12S - 4s - 3t$, u. s. w. bis daß in der Reihe linker Hand

die

die Glieder Zero werden; oder es ist jeder Coefficient p in dem Wehrte von sin. mz die Summe der Producte aus den Coefficienten der nächstvorhergehenden Vertikalreihe, von sin. (m — 1) z an, in die correspondirenden Glieder der Reihe 4, 8, 12, 16 etc.

Wenn Q das Anfangsglied einer Reihe ist, so ist p das erste in der folgenden, und der mte Coefficient aus einer vertikalen Reihe ist die Summe der Producte aus den m ersten Coefficienten der nächstvorhergehenden, in die correspondirenden Glieder der Reihe, 1, 2, 3, 4 . . . m, jedes mit 4 multiplicirt. Man suche jene Summe für jeden Coefficienten nach der Reihe ohne den Factor 4, so muß sie für den Coefficienten aus der zweyten Reihe mit 4, aus der dritten mit 4^2, aus der vierten mit 4^3 u. s. w. multiplicirt werden. Nun ist die erste Reihe der Coefficienten von dem mten bis zum ersten offenbar diese, (2m—1), (2m—3) . . 5, 3, 1, eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied + 1, und der Unterschied = 2 ist. Man setze demnach in (III. dies. Kap.), a = 2, b = 1 so ist die Summe der Producte aus den Gliedern dieser Reihe in die correspondirenden Glieder der Reihe 1, 2, 3 . . . m, das mte Glied der Reihe IV. daselbst, nach (V. dess.) nemlich $\frac{(m+1)m}{1.2} + \frac{2(m+1)m(m-1)}{1.2.3}$, welches noch durch 4 muß multiplicirt werden, um den mten Coefficienten der zweyten Reihe zu bekommen. So wird auch der Factor zu der ge-

hörigen Potenz der Vier in dem mten Coefficienten aus der dritten, vierten u. f. Reihe, das mte Glied der Reihe VI, VIII etc. in (III)

Diese Glieder werden aber für $a = 2$, $b = 1$, folgende, nemlich das mte Glied der Reihe

II. $\frac{2m - 1}{1}$.

IV. $\frac{(m+1)\,m\,(2m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$

VI. $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)\,m\,(2m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$

VIII. $\frac{(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)\,m\,(2m+5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$

etc.

Um die Factores zu bekommen, welche zu Coefficienten in dem Wehrte des nemlichen Sinus, der in der Folge der mte ist, gehören, muß man in dem Ausdruck des mten Gliedes der Reihe IV, für m schreiben $m - 1$, weil das mte Glied der ersten Reihe und das $(m - 1)$te der zweyten in dem Wehrte desselben Sinus zusammen kommen. So muß man für die Glieder der folgenden Reihen $m - 2$, $m - 3$, etc. nach der Reihe für m setzen, und die gesuchten Factoren des ersten, zweyten u. ff. Coefficienten werden diese seyn.

1) $\frac{2m - 1}{1}$

2) $\frac{m\,(m - 1)\,(2m - 1)}{1\,.\,2\,.\,3}$

3)

$$3)\ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$4)\ \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

etc.

Der mte Coefficient in der ersten Reihe gehört zu $\sin.(2m-1)z$ oder $\sin.nz$. Man setze also $2m-1=n$, oder $m=\frac{n+1}{2}$. Diesen Wehrt setze man in den gefundenen Factoren, und multiplicire sie nach der Reihe in die Potenzen 4^0, 4^1, 4^2, 4^3, welche bisher noch aus den Wehrten der Coefficienten weggelassen sind. So erhält man diese, wie folget, da die Potenzen der Vier sich gegen die der Zwey, welche durch jene Substitution hineinkommen, aufheben:

$$A=\frac{n}{1}$$

$$B=\frac{(n+1)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$C=\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$D=\frac{(n+5)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

etc.

Es ist also für ein ungerades n,

74)

$$74)\ \text{sin.}nz = \frac{n}{1}x - \frac{n(nn-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5}x^5$$
$$- \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 \ldots\ldots \mp 2^{n-1}\, x^n.$$

Was das lezte Glied anlangt, so ist zuerst zu bemerken, daß es das erste in der Reihe der Coefficienten ist, die mit ihm zu derselben Potenz von x gehören. Denn wenn Q das erste Glied in einer Reihe ist, so ist es p in der nächstfolgenden. Alsdenn ist Q aber der lezte Coefficient in dem Wehrte des Sinus, wozu es gehört, und daher ist es auch p in dem Wehrte des nächstfolgenden Sinus. Weil alsdenn $p = 4Q$, so ist das Anfangsglied jeder Reihe von Coefficienten das Vierfache von dem aus der vorhergehenden Reihe, und da es in der ersten $= 1$ ist, so wird es in der zweyten, 4, in der dritten, 4^2, in der mten, 4^{m-1} $= 2^{2m-2} = 2^{n-1}$

Das Anfangsglied der mten Vertikalreihe ist zugleich das mte und lezte in dem Wehrte des sin. nz, weil man so viel Sinus als vertikale Reihen von Coefficienten hat. Das lezte Glied ist also $\mp 4^{m-1} . x^{2m-1} = \mp 2^{n-1} x^n$. Das obere Zeichen gilt, wenn m oder $\frac{n+1}{2}$ gerade ist, oder wenn $n+1$ sich durch 4 dividiren läßt, das untere, wenn $n-1$ sich durch 4 dividiren läßt.

X.

X.

Man setze in (65), $a = 0$, $b = 2z$, so hat man $\sin. 2nz = 2\cos. 2z. \sin. (2n - 2) z - \sin. (2n - 4) z = (2 - 4 (\sin. z)^2) \sin. (2n - 2) z - \sin. (2n - 4) z$. Daraus erhält man die Folge der Sinus gerader Vielfacher von z, wie folget.

75) $\sin. 0z = 0$

$\sin. 2z = 2x \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 4z = (4x - 8x^3) \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 6z = (6x - 32x^3 + 32x^5) \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 8z = (8x - 80x^3 + 192x^5 - 128x^7) \sqrt{(1 - xx)}$

etc.

XI.

Die Coefficienten in $\sin. nz = (Ax - Bx^3 + Cx^5 - \text{etc}) \sqrt{(1 - xx)}$ für ein gerades n zu bestimmen, gelten eben die Schlüsse, die für ein ungerades gemacht sind. Die erste Reihe der Coefficienten aber ist von unten auf gerechnet, $2m, 2m-2, \ldots 4, 2$, wenn man den für $\sin. 0z$ nicht mitzählt. Man muß also in (III dies. Kap.) $b = 2$, $a = 2$ setzen, so ist der Factor des mten Coefficienten in der ersten, zweyten und folgenden Reihen nach abgesonderter Potenz der Vier, das mte Glied der Reihe II, IV, VI, etc. in (III). Diese sind, $a = 2$, $b = 2$ gesezt, für

II. $\dfrac{2m}{1}$

IV. $\dfrac{(m+1)\, m\, (2m+4)}{1.\ 2.\ 3.}$

VI.

VI. $$\frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(2m+8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

VIII. $$\frac{(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)m(2m+12)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}$$

etc.

Um die Factoren zu bekommen, welche zu den Coefficienten in dem Wehrte desselben Sinus, der in der Folge der mte ist, gehören, muß man in dem Gliede der Reihe IV für m schreiben m - 1, und m - 2, m - 3, etc. nach der Reihe in jedem folgenden Gliede. Diese werden also

1) $$\frac{2m}{1}$$

2) $$\frac{m(m-1)(2m+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

3) $$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(2m+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

4) $$\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(2m+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}$$

etc.

Weil sin. nz der $\frac{1}{2}$nte in der Folge der Sinus ist, diese Folge von sin. 2z an gerechnet, so muß man, die Factoren durch n auszudrücken, $\frac{1}{2}$n für m schreiben. Wenn man dieses thut, und die Factoren nach der Reihe durch 4^0, 4^1, 4^2, 4^3 ꝛc. multiplicirt, so erhält man die gesuchten Coefficienten, wie folget:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n\,(n-2)\,(n\mp 2)}{1.\;2.\;3.\;4}$$

$$C = \frac{(n\mp 2)\,n\,(n-2)\,(n-4)\,(n\mp 4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}$$

$$D = \frac{(n\mp 4)(n\mp 2)\,n\,(n-2)(n-4)(n-6)(n\mp 6)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}$$

etc.

und es ist für ein gerades n

$$76)\ \sin.nz = \Big(\frac{nx}{1} - \frac{n(nn-4)}{1.\,2.\,3}x^3 \mp \frac{n\,(nn-4)\,(nn-16)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}x^5 - \frac{n\,(nn-4)\,(nn-16)\,(nn-36)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}x^7 \ldots$$

$$\mp 2^{n-1}\,x^{n-1}\Big)\sqrt{(1-xx)}$$

Das lezte Glied ist ein Vielfaches der Vier wie in (74); weil aber der erste Coefficient in der ersten Reihe = 2 ist, so wird der erste in der mten Reihe $2.4^{m-1} = 2.2^{2m-2} = 2^{n-1}$; die dazu gehörige Potenz von x ist $x^{2m-1} = x^{n-1}$. Diese Potenz mit ihrem Coefficienten ist zugleich das lezte Glied in dem Wehrte von sin. nz. Das obere Zeichen gilt, wenn m ungerade, oder wenn m sich nicht durch 4 dividiren läßt.

XII.

Den Sinus des einfachen Winkels aus dem Sinus des Vielfachen zu finden, muß man eine Gleichung von dem Grade auflösen, welcher durch die Zahl des Vielfachen ausgedrückt wird, in dem Fall, daß diese ungerade ist. Ist sie gerade, so wird die Auflösung einer doppelt so hohen Gleichung erfodert, weil die Gleichung (76) erst durch die Quadrirung rational gemacht werden muß. Die trigonometrischen Tafeln geben hier freylich die Auflösung, welche die Algebra bis izt nicht allgemein geben kan. Da aber jede Gleichung überhaupt so viel Wurzeln hat, als in dem Exponenten der höchsten Potenz Einheiten sind, so entsteht die Frage, wie x mehrere Wehrte haben, oder wie derselbe Winkel auf mehrere Arten in gleichviel gleiche Theile getheilet werden könne. Dieses zu erklären, erinnere man sich, daß ein und derselbe Sinus zu zweyerley Winkeln, deren Summe zwey Rechten gleich ist, gehöre. Der Winkel DAC oder der Bogen DC, (Fig. 2.) der kleiner als ein Quadrant ist, sey $nz = s$, sein Sinus $CB = x$, die halbe Peripherie $= \pi$, so ist auch $x = \sin. (\pi - s)$ Aber auch ferner gehöret dieser Sinus zu allen Bogen, deren Anfang in D, und das Ende in C ist, wenn auch die ganze Peripherie, soviel man will, mitgenommen wird, z. E. zu DCdDC. Er gehört ferner nicht allein zu dem Bogen $DCd - DC = \pi - s$, sondern auch zu $DCdDCd - DC = 3\pi - s$ und so weiter zu allen Vielfachen der ganzen Peripherie mit dem Bogen $\pi - s$. Dis ist kein blos willkührlich

lich angenommener Satz, sondern ein Sinus gehört nothwendig zu unendlich viel Bogen oder Winkeln, weil in der allgemeinen Rechnung es unbestimmt bleibt, ob die Linie AC von DA aus unmittelbar in die Lage, welche sie hat, gerückt sey, oder ob sie vorher um den Punkt A vier Rechte oder den ganzen Umfang ein oder mehrmahl beschrieben habe. Es ist demnach $\sin. s = \sin. (\pi - s) = \sin. (2\pi + s) = \sin. (3\pi - s) = \sin. (4\pi + s) = \sin. (5\pi - s) =$ etc. Diesen sind entgegengesezt, aber gleich, $\sin. - s$; $\sin. (-\pi + s)$; $\sin. (-2\pi - s)$; $\sin. (-3\pi + s)$; $\sin. (-4\pi - s)$; $\sin. (-5\pi + s)$; oder wenn man zu den Winkeln die vielfachen von 2π nach der Reihe addirt, $\sin. - s = \sin. (\pi + s) = \sin. (2\pi - s) = \sin. (3\pi + s) = \sin. (4\pi - s) = \sin. (5\pi + s) =$ etc. Die Winkel, deren Summe ein gerades Vielfaches von π, oder deren Unterschied ein ungerades Vielfaches von π ist, gehören zu gleichen, aber entgegengesezten Sinus. Aber die, deren Summe ein ungerades Vielfaches von π, oder deren Unterschied ein gerades Vielfaches von π ist, gehören zu Sinus, die sowohl gleich groß als gleichnahmig sind.

XIII.

Wenn man nun einen Winkel s, dessen Sinus gegeben ist, in n gleiche Theile theilen soll, so muß man jeden der angeführten Winkel, die zu ihm gehören, in n gleiche Theile theilen. Daher die mehrern Wehrte, welche der Sinus des Theiles bekömt. Ob nun gleich die Anzahl der

zu theilenden Winkel unendlich ist, so wird doch die Menge der Wehrte für die Sinus des Theiles nicht unendlich, weil ein Wehrt öfterer wieder kommen kan. Man wird die gleichen Wehrte an den in (XII) gegebenen Kennzeichen aussondern können. Zuerst sey n ungerade, so bekömt man überhaupt für $\sin.\frac{s}{n} = \sin.\ z = x$ folgende Wehrte

1) Positive; $\sin.\frac{s}{n}$; $\sin.\frac{\pi - s}{n}$; $\sin.\frac{2\pi + s}{n}$; $\sin.\frac{3\pi - s}{n}$; ... $\sin.\frac{(n-1)\pi + s}{n}$; $\sin.\frac{n\pi - s}{n}$

2) Negative; $\sin.\frac{(n+1)\pi + s}{n}$; $\sin.\frac{(n+2)\pi - s}{n}$; ... $\sin.\frac{(2n-1)\pi - s}{n}$.

3) Positive; $\sin.\frac{2n\pi + s}{n}$ ..... $\sin.\frac{3n\pi - s}{n}$

4) Negative; $\sin.\frac{(3n+1)\pi + s}{n}$; etc.

etc. etc.

Der positiven Sinus sind jedesmahl n + 1, der negativen n — 1. Unter den positiven der ersten Klasse gehören diejenigen, welche vom Anfang und Ende gleichweit abstehen, zu Winkeln, deren Summe π ist. Sie sind also von einander nicht

nicht verschieden, und diese Klasse liefert nur $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Sinus. Die Winkel, deren Sinus vom Anfang und Ende nicht gleich weit abstehen, machen nicht zusammen π aus; ihre Sinus sind also verschieden. Eben so sind in der zweyten Klasse die Winkel, deren Sinus vom Anfang und Ende gleichweit abstehen, zusammengenommen $= 3\pi$. Diese Sinus sind also nicht verschieden, und diese Klasse gibt nur $\frac{n-1}{2}$ negative verschiedene Sinus; beide Klassen geben n verschiedene Sinus, worunter $\frac{n+1}{2}$ positive, $\frac{n-1}{2}$ negative sind. Dis sind die n Wehrte, welche x in (74) bekömt, wenn der Winkel des sin. nz in n Theile getheilt werden soll. Die übrigen Klassen geben keine von den aus den beiden ersten Klassen verschiedene Sinus, weil die in ihnen befindlichen Sinus zu Winkeln gehören, welche von den Winkeln der Sinus aus den beiden ersten Klassen um gerade Vielfache von π unterschieden sind.

XIV.

Man nehme von der Folge der Sinus aus der ersten Klasse, die erste Hälfte, an der Zahl $\frac{n+1}{2}$; nemlich $\sin.\frac{s}{n}$; $\sin.\frac{\pi - s}{n}$; $\sin.\frac{2\pi + s}{n}$ . . . .

 sin.

sin. $\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi \pm s}{n}$, wo das obere Zeichen für ein gerades $\frac{1}{2}(n-1)$ gilt.

Die negativen Sinus der zweiten Klasse lassen sich nach (XII) bequemer so ausdrücken:

$-\sin.\frac{\pi + s}{n}$; $\sin. - \frac{2\pi - s}{n}$; $\sin. - \frac{3\pi + s}{n}$

$\ldots - \sin.\frac{(n-1)\pi - s}{n}$, wo ebenfalls die, welche vom Anfang und Ende gleichweit abstehen, einander gleich sind. Nimt man also auch hier die erste Hälfte, an der Zahl $\frac{1}{2}(n-1)$, so hat man die Reihe der verschiedenen negativen Sinus.

$-\sin.\frac{\pi + s}{n}$; $-\sin.\frac{2\pi - s}{n} \ldots - \sin.\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi \mp s}{n}$

Nimt man die positiven und negativen Sinus zusammen, so erhält man für $x = \sin.\frac{s}{n} = \sin. z$, folgende Wehrte,

$+\sin. z$; $+\sin.(\frac{\pi}{n} - z)$; $-\sin.(\frac{\pi}{n} + z)$; $-\sin.(\frac{2\pi}{n} - z)$;

$+\sin.(\frac{2\pi}{n} + z)$; $+\sin.(\frac{3\pi}{n} - z)$; $-$ etc. bis man deren an der Zahl n hat.

XV.

Für ein gerades n hat man für sin. $\frac{s}{n}$ folgende Wehrte.

1) Positive, sin. $\frac{s}{n}$; sin. $\frac{\pi - s}{n}$; sin. $\frac{2\pi + s}{n}$

. . . . . sin. $\frac{(n-2)\pi + s}{n}$; sin. $\frac{(n-1)\pi - s}{n}$

2) Negative, sin. $\frac{n\pi + s}{n}$; sin. $\frac{(n+1)\pi - s}{n}$ . .

. . . . . sin. $\frac{(2n-1)\pi - s}{n}$.

3) Positive, sin. $\frac{2n\pi + s}{n}$; . . . sin. $\frac{(3n-1)\pi - s}{n}$

4) Negative, sin. $\frac{3n\pi + s}{n}$; . . . sin. $\frac{(4n-1)\pi - s}{n}$

Die Sinus aus der ersten und zweyten Klasse, welche in beiden gleichweit vom Anfange abstehen, sind einander gleich, aber entgegengesezt. Die Sinus der dritten Klasse sind den Sinus aus der ersten nach der Reihe gleich, und wie sie, bejaht. So sind auch die Sinus aus der zweyten und vierten nach der Reihe genommen einander gleich und beiderseits verneint. Die Sinus aller folgenden Klassen sind die, welche in den ersten beiden schon vorkommen. Die erste Klasse liefert n positive verschiedene Sinus, die zweyte eben so viel diesen gleiche, aber entgegengesezte

oder verneinte. Die zweyte Hälfte der positiven Sinus aus der ersten Klasse, kan man auch folgendergestalt ausdrücken, die Sinus vom Ende rückwärts genommen.

$$\sin.\frac{\pi + s}{n};\ \sin.\frac{2\pi - s}{n};\ \sin.\frac{3\pi + s}{n};\ \sin.\frac{4\pi - s}{n}$$

bis daß man ihrer $\frac{1}{2}n$ hat. Also sind die positiven Sinus zusammen folgende

$$\sin.\frac{s}{n};\ \sin.\frac{\pi - s}{n};\ \sin.\frac{\pi + s}{n};\ \sin.\frac{2\pi - s}{n};$$

$\sin.\frac{2\pi + s}{n}$ etc. bis man ihrer n hat.

Ihnen entsprechen eben soviel gleiche negative Sinus aus der zweyten Klasse, und es hat demnach $x = \sin.\frac{s}{n} = \sin. z$, folgende Wehrte:

$$\pm \sin. z;\ \pm \sin.\frac{\pi - s}{n};\ \pm \sin.\frac{\pi + s}{n};$$

$\pm \sin.\frac{2\pi - s}{n};\ \pm \sin.\frac{2\pi + s}{n}$, bis daß man n Paare hat. Dieses sind die n Paare gleicher entgegengesezter Wehrte, welche x in der Gleichung (76) wenn sie quadrirt wird, bekömt.

XVI.

Man schreibe die Gleichung (74) folgendergestalt,

$$\pm x^n - Px^{n-2} \ldots \pm \frac{nx}{2^{n-1}} - \frac{\sin. nz}{2^{n-1}} = 0$$

wenn

wenn $\frac{1}{2}(n+1)$ ungerade ist, oder

$$+ x^n - Px^{n-2} - \frac{nx}{2^{n-1}} + \frac{\sin. nz}{2^{n-1}} = 0,$$ wenn

$\frac{1}{2}(n+1)$ gerade ist. Das Glied Px^{n-2} ist nur der Folge der Exponenten von x wegen zugesezt. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die n verschiedenen Sinus, welche man erhält, wenn der Winkel des sin. nz in n gleiche Theile getheilet wird.

(XIV) Es ist aber der Coefficient von x^{n-1}, in einer Gleichung vom nten Grade, gleich der Summe aller den Wurzeln entgegengesezter Grössen. * Dieser ist in unserer Gleichung = 0; also ist die Summe der Wurzeln selbst = 0, oder

$$77)\ 0 = \sin. z + \sin.\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \sin.\left(\frac{\pi}{n} + z\right)$$
$$- \sin.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \sin.\left(\frac{3\pi}{n} - z\right)$$
$$\text{etc.}$$

bis daß man n Sinus hat.

Ferner ist das lezte Glied $+ \frac{-\sin. nz}{2^{n-1}}$ gleich dem Product aus allen den Wurzeln entgegengesezten Grössen. ** Nun sind der positiven Wurzeln an der Zahl $\frac{1}{2}(n+1)$, das Product aus ihren entgegen-

* S. Kästners Anal. endl. Grössen §. 224.

** Kästner a. a. O.

entgegengesezten ist positiv, wenn $\frac{1}{2}(n \mp 1)$ gerade ist, in welchem Falle das untere Zeichen des lezten Gliedes gilt. In dem gegenseitigen Falle ist es negativ, und für diesen wird auch das Zeichen des lezten Gliedes geändert. Es ist daher in beiden Fällen

$$78)\ \frac{\text{sin. } nz}{2^{n-1}} = \text{sin. } z.\ \text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right).\ \text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} \mp z\right).$$

$$\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right).\ \text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} \mp z\right).\text{etc.}$$ bis daß man n Factoren hat.

Endlich ist noch der Coefficient von x die Summe aller Producte, welche man aus den entgegengesezten der Wurzeln machen kan, wenn man je eines aus dem Producte aller wegläßt. Diese Summe ist folglich $= \underset{-}{\mp} \frac{n}{2^{n-1}}$. Wenn aber jedes dieser Producte mit dem Producte aller dividirt wird, so bekomt man eine Folge von Brüchen, deren Zähler $= 1$, und der Nenner das entgegengesezte je einer der Wurzeln ist.

Also ist $\underset{-}{\mp} \frac{n}{2^{n-1}} : \overset{-}{\mp} \frac{\text{sin. } nz}{2^{n-1}} = \frac{-n}{\text{sin. } nz} = \frac{-1}{\text{sin. } z}$

$- \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right)} \mp \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} \mp z\right)} \mp$ etc. oder

$$79)\ \frac{n}{\text{sin. } nz} = \frac{1}{\text{sin. } z} + \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} - z\right)} - \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{\pi}{n} + z\right)}$$

$$- \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right)} + \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)} + \frac{1}{\text{sin.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right)}$$

— etc. bis daß man n Glieder hat.

Man hätte auch, um die verschiedenen Sinus des nten Theils des Winkels zu sin. nz zu erhalten, in (XIII) die positiven und negativen Sinus der beiden ersten Klassen eins ums andre nehmen können. Und so bekäme man an statt 77) die Gleichung

$$80)\ 0 = \text{sin. } z + \text{sin.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \text{sin.}\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)$$

$$+ \text{sin.}\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \text{sin.}\left(\frac{(2n-2)\pi}{n} + z\right).$$

Hieraus kan die Formel (67) erläutert werden. Wenn daselbst $b = \frac{2\pi}{n}$ oder $nb = 2\pi$, so wird die Summe $\text{sin. } a + \text{sin. }(a+b) + \text{sin. }(a+2b) \ldots + \text{sin. }(a+(n-1)\,b) + \text{sin. }(a+nb.)$

$$= \frac{\text{sin. }(a+\pi)\ .\ \text{sin.}\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)}{\text{sin. } \frac{\pi}{n}} = \text{sin. } a =$$

sin. $(a + 2\pi) =$ sin. $(a + nb)$. Das ist, die Summe der ganzen Reihe wird bis auf den lezten $= 0$, wie sie es nach (77) seyn muß. So wie also in diesem Fall n aufeinanderfolgende Sinus von dem ersten an, und so immer fort, sich gegen einander auf heben, so heben sich überhaupt die negativen Sinus einer solchen Progreßion gegen die positiven Sinus zum Theil oder ganz auf.

XVII.

Die Gleichung (76) rational zu machen, quadrire man beide Theile, so hat man

$$(\text{sin. } nz)^2 = nnxx + Px^4 \; . \; . \; — 2^{2n-2} x^{2n}$$

$$\text{oder } x^{2n} \; . \; . \; . \; . \; — \frac{nnxx}{2^{2n-2}} + \frac{(\text{sin. } nz)^2}{2^{2n-2}} = 0$$

Diese Gleichung hat 2n Wurzeln, deren je zwey sich gleich und entgegengesezt sind. Diese sind die in (XV) angegebenen 2n Sinus des nten Theils von dem Winkel des sin. nz. Das Product ihrer entgegengesezten oder aus ihnen selbst ist gleich dem lezten Gliede $\frac{(\text{sin. } nz)^2}{2^{2n-2}}$; und weil jede Wurzel zweymahl vorkömt, so erhält man durch die Ausziehung der Quadratwurzel

$$81) \; \frac{\text{sin. } nz}{2^{n-1}} = + \text{sin. } z. \text{ sin. } \left(\frac{\pi}{n} — z\right). \text{sin. } \left(\frac{\pi}{n} + z\right).$$

$$\text{sin. } \left(\frac{2\pi}{n} — z\right) \text{ sin. } \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \text{ etc.}$$ bis daß man n Factoren hat. Wegen des vorgesezten

Zei-

Zeichens ist noch zu bemerken, daß das Zeichen —, welches sonst bey der Ausziehung der Quadratwurzel neben dem + noch statt findet, hier nicht gebraucht werden kan. Denn da die Factores selbst alle positiv sind, so müste, wenn man die Wurzel negativ nehmen wollte, auch $\frac{\sin. nz}{2^{n-1}}$ negativ genommen werden, welches nichts anders ist, als beide Theile positiv setzen.

Diese Formel ist übrigens dieselbe mit der (78) für ein ungerades n, beyde sind zur Erfindung der Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel nüzlich.

XVIII.

Weil $\frac{\sin. 2nz}{\sin. nz} = 2 \cos. nz$, und $\sin. 2nz =$

$2^{2n-1}. \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{2n} - z). \sin. (\frac{\pi}{2n} + z).$

$\sin. (\frac{2\pi}{2n} - z). \sin. (\frac{2\pi}{2n} + z). \sin. (\frac{3\pi}{2n} - z).$

$\sin. (\frac{3\pi}{2n} + z)$ etc. bis daß man 2n Factoren hat, so gibt dieses Product durch $\sin. nz = 2^{n-1} \sin. z$ $(\frac{\pi}{n} - z)$ etc. (78 oder 81) und durch 2 dividirt,

82) $\cos. nz = 2^{n-1} \sin. (\frac{\pi}{2n} - z). \sin. (\frac{\pi}{2n} + z).$

sin.

sin. $(\frac{3\pi}{2n} - z)$. sin. $(\frac{3\pi}{2n} + z)$. etc. bis daß man n Factoren hat.

Jeder Winkel, der in dem Product für sin. 2nz ein gerades Vielfaches von π enthält, kömt in dem Product für sin. nz auch vor, und daher heben sich die n Factoren des leztern gegen n Factoren des erstern auf. Die lezten Factoren des Products sin. 2nz sind sin. $(\frac{(n-1)\pi}{2n} - z)$. sin. $(\frac{(n-1)\pi}{2n} + z)$. sin. $(\frac{n\pi}{2n} - z)$. Die lezten Factoren des Products sin. nz sind für ein gerades n diese, sin. $(\frac{\frac{1}{2}(n-2)\pi}{n} - z)$. sin. $(\frac{\frac{1}{2}(n-2)\pi}{n} + z)$. sin. $(\frac{\frac{1}{2}n\pi}{n} - z)$, und für ein ungerades n, sin. $(\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi}{n} - z)$. sin. $(\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi}{n} + z)$, welche, so so wie alle vorhergehende in dem Producte sin. 2nz vorkommen.

XIX.

Man setze in (66), $a = 0$, $b = z$, so erhält man cs. nz $=$ 2cs. z. cs. $(n-1)z$ — cs. $(n-2)z$. und es ist

83) $\cos. 0z = 1$

$\cos. z = y$

$\cos. 2z = 2yy - 1$

$\cos. 3z = 4y^3 - 3y$

$\cos. 4z = 8y^4 - 8yy + 5y$

$\cos. 5z = 16y^5 - 20y^3 + 5y$

$\cos. 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18yy - 1$

$\cos. 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$

etc.

XX.

Die Coefficienten der allgemeinen Reihe $\cos. nz = Ay^n - By^{n-2} + Cy^{n-4} -$ etc. kan man aus der Formel für $\sin. nz$, (72) vermittelst der Gleichung $\sin. (n+1)z = \sin. nz. \cos. z + \sin. z. \cos. nz$, (25) oder $\cos. nz = \frac{\sin. (n+1)z - \sin. nz. \cos. z}{\sin. z}$, bestimmen.

Denn da $\frac{\sin. (n+1)z}{\sin. z} = 2^n y^n - (n-1)2^{n-2}y^{n-2}$

$+ \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2} 2^{n-4} y^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} 2^{n-6} y^{n-6}$

$\ldots \pm \frac{(n-r)(n-r-1) \ldots (n-2r+1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots r} 2^{n-2r} y^{n-2r}$

und $\frac{\sin nz. \cos. z}{\sin. z} = \frac{1}{2}(2^n y^n - (n-2)2^{n-2} y^{n-2}$

$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2} 2^{n-4} y^{n-4} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3} 2^{n-6} y^{n-6}$

...

$$\ldots \pm \frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)(n-2r)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ r} 2^{n-2r} y^{n-2r}$$

so gibt diese Gleichung von jener abgezogen,

$$84)\ \cos. nz = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1.\ 2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} 2^{n-7} y^{n-6}$$

$$\ldots \pm \frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ r} 2^{n-2r-1} y^{n-2r} \mp \text{etc.}$$

Wenn $n=2r$, so wird das allgemeine Glied ± 1 und zugleich das lezte, weil y auf die niedrigste Potenz, die möglich ist, gebracht ist. Ist aber $n=2r+1$, so wird dieses Glied $= \pm ny$ und ebenfalls das lezte. Das Zeichen $+$ gilt, wenn r gerade, d. i. wenn ein gerades n sich durch 4 dividiren läßt, oder wenn für ein ungerades n, $n-1$ ein Vielfaches von Vier ist.

XXI.

Den Cosinus des Winkels z aus dem Cos. nz zu finden, muß man eine Gleichung vom nten Grad auflösen. Er bekömt also n Wehrte. Die Ursache ist, weil ein und derselbe Cosinus unendlich viel Winkeln oder Bogen zugehört. Der Cosinus BA des Bogens DC (Fig. 2.) gehört zu $\pm$ DC, zu $\pm 2\pi \pm$ DC, zu $\pm 4\pi \pm$ DC etc., zu allen Bogen, deren Anfang in D, der Endpunkt

punkt in C oder Q ist. Oder es ist cos. $\pm$ nz $=$ cs. $(2\pi \pm nz) =$ cs. $(4\pi \pm nz) =$ cs. $(6\pi \pm nz)$ etc., und es müssen die Winkel aller dieser Cosinus durch n getheilt werden, wenn man den cos. z $= y$ aus cos. nz sucht. In der Folge der Cosinus, cs. $\pm z$; cs. $(\frac{2\pi}{n} \pm z)$; cs. $(\frac{4\pi}{n} \pm z)$; .... cos. $(\frac{2n-2}{n}\pi \pm z)$; cos. $(\frac{2n\pi}{n} \pm z)$ gehören der erste und der lezte, der zweyte und der vorlezte, und überhaupt die, welche vom Anfang und Ende gleich weit abstehen, zu Winkeln, deren Summe 2π ist, wenn man die Zeichen von z verschieden nimt. Sie sind also der Grösse und Beziehung nach einerley. (VI. Kap. 1.) Die folgenden Cosinus, welche nicht zugesezt sind, sind den vorhergehenden nach der Reihe gleich; der cos. $(\frac{2n \pm 2}{n}\pi \pm z)$ ist der cos. $(\frac{2\pi}{n} \pm z)$ weil der Unterschied ihrer Winkel 2π ist, einerley Zeichen für z gebraucht, u. s. w. Die verschiedenen Cosinus des nten Theils von dem Winkel des cos. nz zu bekommen, braucht man sie also nur aus den angeführten auszusuchen. Ihrer sind n $\pm$ 1 Paare, wegen des doppelten Zeichens von z. Ist n gerade, so bleibt in der Mitte cos. $(\frac{n\pi}{n} \pm z) =$ cos. $(\pi \pm z)$ übrig. Vor diesem gehen $\frac{1}{2}$n Paare vorher, welche mit den $\frac{1}{2}$n

folgenden Paaren einerley ſind. Dieſe leztern braucht man alſo nicht. Unter jenen ſind die beyden Coſinus des erſten Paars coſ. $+z$, coſ. $-z$ einerley, wie es auch die beyden aus der Mitte coſ. $(\pi + z)$, coſ. $(\pi - z)$ ſind. Die Folge der verſchiedenen Coſinus wird daher dieſe ſeyn:

$$\text{cſ. } z; \text{ cſ. }\left(\frac{2\pi}{n} \pm z\right); \text{ cſ. }\left(\frac{4\pi}{n} \pm z\right) \ldots \text{ cſ. }\left(\frac{n\;2}{n}\pi \pm z\right);$$

coſ. $(\pi - z)$, an der Zahl n.

Von dieſen ſind die, deren Winkel zuſammen π ſind, einander zwar gleich, aber entgegengeſezt, nemlich coſ. z und coſ. $(\pi - z)$, wie auch die Coſinus aus den Paaren, welche vom Anfang und Ende gleich weit abſtehen, für z verſchiedene Zeichen gebraucht. Ihre Summe iſt demnach $= 0$.

Wenn n ungerade iſt, ſo iſt die Anzahl der Paare gerade, und die erſte Hälfte, welche mit der zweyten einerley iſt, iſt, coſ. $\pm z$; coſ. $\left(\frac{2\pi}{n} \pm z\right)$;

$$\text{coſ. }\left(\frac{4\pi}{n} \pm z\right); \ldots \text{ coſ. }\left(\frac{(n-1)\pi}{n} \pm z\right).$$

Weil coſ. $+z =$ coſ. $-z$, ſo gibt dieſe Hälfte n verſchiedene Coſinus.

XXII.

Dieſe n Coſinus ſind die Wehrte, welche y in der Gleichung (84) hat, oder die Wurzeln dieſer Gleichung, da y den Coſinus des nten Theils von dem Winkel des coſ. nz bedeutet. Weil

da-

daselbst die nächste Potenz nach der höchsten fehlt, so ist

$$85)\quad 0 = \cos. z + \cos.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \cos.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$$

$$+ \cos.\left(\frac{4\pi}{n} - z\right) + \cos.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \text{etc.}$$

bis daß man n Cosinus hat.

Für den Fall, daß n ungerade ist, setze man in der leztern Hälfte der Folge $\cos. z$, $\cos.\left(\frac{2\pi}{n} \pm z\right)$;

$$\ldots \cos.\left(\frac{n-3}{n}\pi \pm z\right);\quad \cos.\left(\frac{n-1}{n}\pi \pm z\right),$$

für die Winkel ihre Complemente zu zwey Rechten. Weil überhaupt $\cos. v = -\cos.(\pi - v)$, so verwandelt sich diese Folge, deren Summe $= 0$ ist, in diese:

$$86)\quad 0 = \cos. z - \cos.\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \cos.\left(\frac{\pi}{n} + z\right)$$

$$+ \cos.\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \cos.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) - \text{cs.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right)$$

$$- \cos.\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) + \cos.\left(\frac{4\pi}{n} - z\right) + \text{cs.}\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)$$

$$\ldots \pm \cos.\left(\frac{n-1}{2n}\pi - z\right) \pm \cos.\left(\frac{n-1}{2n}\pi + z\right).$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade

ist, oder wenn $n - 1$ sich durch 4 theilen läßt.

Der Fall da $n = 1$ ist, muß ausgenommen werden, weil alsdenn die Gleichung (84) mit dem ersten Gliede vollständig ist, und kein zweytes Glied fehlt.

XXIII.

Das Product aller Wurzeln findet man allgemein aus der Gleichung (82), wenn man nach der Formel $= \cos.(\frac{1}{2}\pi - v) = \sin. v$ für die Sinus die Cosinus substituirt. So erhält man

$$87) \cos. nz = 2^{n-1} \cos.(\frac{n-1}{2n}\pi + z). \cos(\frac{n-1}{2n}\pi - z).$$

$$\cos.(\frac{n-3}{2n}\pi + z). \cos.(\frac{n-3}{2n}\pi - z).$$

$$\cos.(\frac{n-5}{2n}\pi + z). \cos.(\frac{n-5}{2n}\pi - z).$$

etc.

bis daß man n Factoren hat.

XXIV.

Für ein ungerades n bringe man die Gleichung (84) auf die Gestalt

$$y^n \ldots \ldots \pm \frac{n}{2^{n-1}} y - \frac{\cos. nz}{2^{n-1}} = 0.$$

so ist $\pm \frac{n}{2^{n-1}}$ die Summe aller Producte, welche man aus den entgegengesezten der Wurzeln machen kan, wenn man je eines aus dem Producte

ducte aller wegläßt. Und $-\frac{\cos. nz}{2^{n-1}}$ ist das Product aller dieser Grössen. Folglich ist $\mp\frac{n}{-2^{n-1}} : \frac{cs. nz}{2^{n-1}}$

$$= \mp\frac{n}{\cos. nz} = \frac{1}{\cos. z} \mp \frac{1}{cs.(\frac{\pi}{n} - z)} \mp \frac{1}{cs.(\frac{\pi}{n} \mp z)}$$

$$\ldots \mp \frac{1}{\cos.(\frac{n-1}{2n}\pi - z)} \mp \frac{1}{\cos.(\frac{n-1}{2n}\pi \mp z)}$$

Die Nenner dieser Brüche sind das entgegengesezte der Wurzeln, deren Summe in (86) enthalten ist. Wenn man den zweyten Theil der Gleichung vom Ende anfängt, so ist

$$88) \quad \frac{n}{\cos. nz} = \frac{1}{\cos.(\frac{n-1}{2n}\pi \mp z)} \mp \frac{1}{\cos.(\frac{n-1}{2n}\pi - z)}$$

$$- \frac{1}{\cos.(\frac{n-3}{2n}\pi \mp z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{n-3}{2n}\pi - z)}$$

$$\mp \frac{1}{\cos.(\frac{n-5}{2n}\pi \mp z)} \mp \frac{1}{\cos.(\frac{n-5}{2n}\pi - z)}$$

$$- \text{etc.}$$

bis daß man n Brüche hat.

Aus den Gleichungen (88, 79) ergeben sich noch die Formeln für n sec. nz, und n cos. nz durch die Secanten und Cosecanten der einfachen Winkel ausgedrükt, weil sec. v $= \frac{1}{\cos. v}$ und cosec. v $= \frac{1}{\sin. v}$. (1 Kap. IV.) Der Kürze wegen, und da die Substitution sehr leicht ist, lasse ich sie weg. Man findet diese und die Formeln 75-88 in Herrn Eulers Introductione in Analysin infinitorum P. I. Cap. XIV, dessen Vortrag ich durch die hinzugefügten Beweise der allgemeinen Formeln und einige andere Betrachtungen zu erläutern gesucht habe.

XXIV.

Die gefundenen Formeln lassen sich auch auf die Vervielfältigung der Winkel vermittelst der Chorden anwenden. Der Sinus eines Winkels ist die halbe Chorde des doppelten, und der Cosinus die halbe Chorde des Complements dieses doppelten Winkels zu zwey Rechten. Der Halbmesser des Cirkels CDB (F. 3.) sey = 1; der Bogen CD oder der Winkel CAD = z, die Chorde CD = u, die Chorde des Complements DB = v = $\sqrt{(4 - uu)}$. Der Sinus des halben Bogens GD = $\frac{1}{2}$z sey x = DF, und cos. $\frac{1}{2}$z = y = FA. So ist x = $\frac{1}{2}$u, und y = $\frac{1}{2}$v = $\frac{1}{2}\sqrt{(4 - uu)}$ weil DB parallel mit FA und CA : CB = 1 : 2 = FA : DB ist. Diese Wehrte von x und y substi-

substituire man in der Gleichung

$$2 \sin. \tfrac{1}{2}nz = 2x \left(2^{n-1} y^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} 2^{n-3} y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2} 2^{n-5} y^{n-5} - \text{etc.}\right)$$

welche man aus (72) erhält, wenn man für das dortige z hier $\frac{1}{2}$z nimt, und die Gleichung mit 2 multiplicirt. Auch schreibe man Chord.nz für 2 sin. $\frac{1}{2}$nz. So wird

$$89)\ \text{chord.}\,nz = u \left(v^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} v^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2} v^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3} v^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} v^{n-9} - \text{etc.}\right)$$

Wenn nz = o, oder die ganze Peripherie, oder ein Vielfaches derselben ist, so wird chord.nz = o, und die Gleichung, nachdem sie mit u dividirt ist, wird,

$$90)\ o = v^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} v^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2} v^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3} v^{n-7} + \text{etc.}$$

XXV.

Die Chorde des vielfachen Winkels durch die Chorde des einfachen auszudrücken, dienen die Glei-

Gleichungen (74, 76). Wenn n ungerade ist, so nehme man in der Gleichung (74), $\frac{1}{2}z$ für z, $x = \sin.\frac{1}{2}z$, so wird sie diese, $2\sin.\frac{1}{2}nz$

$$= 2\left(nx - \frac{n(nn-1)}{1.2.3}x^3 \;.\;.\;.\;.\; \mp 2^{n-1}x^n\right)$$

und daher ist, wie in (XXIV)

$$91)\quad \mathrm{Chord.}\, nz = nu - \frac{n(nn-1)}{1.2.3.4}u^3$$

$$+ \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5.16}u^5 \;.\;.\;.\; \mp u^n.$$

Wenn chord. nz = 0, so wird diese Gleichung, nachdem sie mit u dividirt ist,

$$92)\quad 0 = n - \frac{n(nn-1)}{1.2.3.4}u^2 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5.16}u^4$$

$$.\;.\;.\;.\; \mp u^{n-1}.$$

Diese Formel wird, wenn man die höchste Potenz von u immer bejaht läßt, für

$n = 3$	$uu - 3 = 0$
$n = 5$	$u^4 - 5u^2 + 5 = 0$
$n = 7$	$u^6 - 7u^4 + 14u^2 - 7 = 0$
$n = 9$	$u^8 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$
etc.	etc. etc.

XXVI.

Für ein gerades n wird auf eben diese Art aus (76)

93) $\text{Chord.}\, nz = v\left(\frac{n}{1.2}u - \frac{n(nn-4)}{1.2.3.8}u^3 + \frac{n(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5.32}u^5 \;.\;.\;.\; \pm u^{n-1}\right).$

Wenn Chord. nz = o, so wird diese Gleichung, nachdem sie durch vu dividirt ist,

94) $0 = \frac{n}{1.2} - \frac{n(nn-4)}{1.2.3.8}u^2 + \frac{n(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5.32}u^4 \;.\;.\;.\; \pm u^{n-2}.$

Diese Formel wird für

$n = 4$	$u^2 - 2 = 0$
$n = 6$	$u^4 - 4u^2 + 3 = 0$
$n = 8$	$u^6 - 6u^4 + 10u^2 - 4 = 0$
$n = 10$	$u^8 - 8u^6 + 21u^4 - 20u^2 + 5 = 0$
etc.	etc.

XXVII.

Daß in diesen Gleichungen v und u mehrere Wehrte bekommen, entsteht daher, weil eine und dieselbe Chorde, wie ein Sinus, zu unendlich viel Bogen gehört. Es sey AB ein Bogen der kleiner ist als die halbe Peripherie, (Fig. 8.) so gehört dessen Chorde AB auch zu seinem Complemente zur ganzen Peripherie BDA, nicht weniger zu allen Bogen, deren Endpunkte in A und B sind, das ist zu den Bogen AB oder BDA um die ganze Peripherie oder um ein Vielfaches derselben vergrössert. Es sey der ganze Umfang = P,

der Bogen AB = nz; so sind der Bogen nz, P — nz, P + nz, 2P — nz, 2P + nz, 3P — nz, ꝛc. Chorden einander gleich. Aber das erste, dritte, fünfte Paar u. s. w. sind dem zweyten, vierten, sechsten u. s. w. entgegengesezt. Die Chorden wachsen nemlich mit dem Bogen, bis daß dieser der halbe Umfang wird, weiterhin nehmen sie ab, und die Chorde des ganzen Umfangs ist = 0. Für einen Bogen, der grösser als der einfache Umfang, und kleiner als der doppelte ist, erhalten die Chorden negative Wehrte, wegen des Durchganges durch Zero. Aus eben dem Grunde wird die Chorde eines Bogens, der grösser als der doppelte Umfang und kleiner als der dreyfache ist, wieder bejaht, und überhaupt sind die Chorden der Bogen 2mP + nz und (2m + 1)P — nz bejaht, aber die Chorden der Bogen 2mP — nz und (2m + 1) P + nz verneint.

Wenn nun der Bogen einer gegebenen positiven Chorde in n Theile getheilet werden soll, so muß man alle die Bogen, zu welchen diese positive Chorde gehört, in n Theile theilen, das ist, wenn nz der kleinste derselben ist, die Bogen nz, P — nz, 2P + nz, 3P — nz, 4P + nz, 5P — nz ꝛc. Hieraus erhält man auf eben die Art, wie für die Sinus in (XIII), wenn n ungerade ist, n verschiedene Wehrte für die Chorde des nten Theils, worunter $\frac{n+1}{2}$ positive und $\frac{n-1}{2}$ negative sind. Dis sind die n Wurzeln

der

der Gleichung (91). Sie sind jede doppelt so groß als die Wurzeln der Gleichung (74), welche von jener nicht weiter unterschieden ist, als daß man in derselben für sin. nz uud z das doppelte gesezt hat.

Wenn n gerade ist, so erhält man wie in (XV) für die Chorde des nten Theils eines Bogens, dessen Chorde gegeben ist, n positive und eben so viel ihnen entgegengesezte negative Wehrte, welche die Wurzeln der Gleichung (93) sind, nachdem sie quadrirt, und für v^2 sein Wehrt durch u gesezt ist.

XXVIII.

Wenn chord. nz = o, so ist nz entweder = o, oder die Peripherie, oder ein jedes Vielfaches derselben. Wenn also der Bogen dieser Chorde in n Theile getheilt werden soll, so muß man alle diese Bogen in so viel Theile theilen. Wenn der zu theilende Bogen = o ist, so ist der Theil auch = o wie die Chorde desselben. Diese wird auch = o, wenn der zu theilende Bogen nP oder überhaupt der Umfang in ein vielfaches von n multiplicirt ist. Für diese Fälle werden die Gleichungen (91, 93) durch den Factor u = o auf Zero gebracht. So wie also in den Gleichungen (92, 94) dieser Factor weggelassen ist, so lasse man diesen Wehrt der Chorde des Theils auch weg. So hat man die verschiedenen Wehrte nur unter den Chorden folgender Bogen auszusuchen.

$$\text{I.}\ \frac{1}{n}P,\ \frac{2}{n}P,\ \frac{3}{n}P,\ \ldots\ \frac{n-3}{n}P,\ \frac{n-2}{n}P,\ \frac{n-1}{n}P,$$

$$\text{II.}\ \frac{n+1}{n}P,\ \frac{n+2}{n}P,\ \frac{n+3}{n}P,\ \ldots\ \frac{2n-3}{n}P,\ \frac{2n-2}{n}P,\ \frac{2n-1}{n}P.$$

Die Chorden der ersten Klasse sind positiv, der zweiten negativ. Aber die Chorden der Bogen, welche in jeder Klasse vom Anfang und Ende gleichweit abstehen, sind dieselben; und die Bogen, welche in der einen und der andern Klasse dieselbe Stelle einnehmen, gehören zu denselben aber entgegengesezten Chorden, daß man daher statt der Chorden der Bogen aus der zweiten Klasse die Chorden derer aus der ersten, negativ genommen, setzen kan. Wenn man also aus jeder Klasse die verschiedenen Chorden aussucht, so bekömt man für die Chorde des nten Theils des Bogens, dessen Chorde = 0 ist, folgende Wehrte,

$$+\text{Ch.}\frac{1}{n}P;\ -\text{Ch.}\frac{2}{n}P;\ +\text{Ch.}\frac{3}{n}P;\ -\text{Ch.}\frac{4}{n}P$$

$$\ldots\ -\text{Ch.}\frac{n-3}{n}P;\ +\text{Ch.}\frac{n-2}{n}P;\ -\text{Ch.}\frac{n-1}{n}P$$

Wenn n ungerade ist, so sind diese n - 1 Chorden, wovon die eine Hälfte positiv, die andere negativ ist, die Wurzeln der Gleichung (92). Sie sind die Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, zu dem Halbmesser = 1 gehörig, wenn man unter Diagonalen alle Linien versteht, welche von einem Winkel desselben an alle übrigen gezogen werden, und so die beiden an diesem

Win-

Winkel liegende Seiten auch unter die Diagonalen rechnet. Von diesen Diagonalen ist die erste positiv, die zweyte negativ, und so weiter wechselsweise zu nehmen. Z. E. der Cirkel ABCDE (Fig. 8.) mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, sey in 5 gleiche Theile getheilet, so sind die Chordan $+ AB$, $- AC$, $+ AD$, $- AE$, die Wurzeln der Gleichung $0 = u^4 - 5u^2 + 5 = 0$.

Wenn n gerade ist, so wird n-1 ungerade, und es bleibt in der Reihe der Chorden in der Mitte $\pm Ch. \frac{\frac{1}{2}n}{n}P = \pm Ch. \frac{1}{2}P$ übrig, vor welcher $\frac{1}{2}n - 1$ Chorden vorher gehen und eben so viel nachher folgen. Diese Chorde ist der Durchmesser selbst. Für sie wird die Chorde des Complements $v = 0$, und die Gleichung (94) wird nicht durch den Durchmesser, sondern durch den aus (93) weggelassenen Factor v auf Zero gebracht. Diese Ch. $\frac{1}{2}P$ weggelassen, sind die übrigen $n-2$ Chorden die Wurzeln der Gleichung (94). Dis sind die Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von n Seiten für den Halbmesser $= 1$, die Diagonale, welche der Durchmesser ist, weggelassen, und die übrigen eine um die andere positiv und negativ genommen. Z. E. der Cirkel ABCDEF mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, (Fig. 9.) sey in 6 gleiche Theile getheilet, so sind $+ AB$, $- AC$, $+ AE$, $- AF$, die Wurzeln der Gleichung $u^4 - 4u^2 + 3 = 0$.

XXIX.

XXIX.

In (92) ist das Product aus den entgegengesezten der Wurzeln $= \mp n$, wenn $n - 1$ ein Vielfaches von 4 ist, und $-n$ im gegenseitigen Fall, in welchem man nemlich das Zeichen der höchsten Potenz von u und aller übrigen Theile ändern muß. Da nun die Gleichung $\frac{1}{2}(n - 1)$ positive und eben so viele jenen gleiche negative Wurzeln hat, so ist das Product aus ihren entgegengesezten, oder aus ihnen selbst, positiv, wenn $\frac{1}{2}(n - 1)$ gerade, oder wenn $n - 1$ ein Vielfaches von 4 ist. Im gegenseitigen Falle wird es negativ, und $= -n$; folglich ist in beyden Fällen $\mp n =$ dem Product aus den Wurzelgrössen, alle positiv genommen; oder das Product aus allen $n - 1$ Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von einer ungeraden Anzahl Seiten ($= n$) für den Halbmesser $= 1$, ist der Zahl der Seiten gleich.

Auf eben die Art ist $\frac{1}{2} n =$ dem Producte aller Wurzelgrössen in (94), und wenn man den unter ihnen nicht befindlichen Durchmesser $= 2$ zu den Factoren nimt, so ist ebenfalls das Product aus allen $n - 1$ Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von einer geraden Anzahl Seiten ($= n$) für den Halbmesser $= 1$, gleich der Zahl der Seiten.

XXX.

Die Chorde, welche für den Halbmesser $= 1$, u genannt wurde, heisse w für den Halbmesser $= r$.

So

So ist $1 : r = u : w$, und $u = \frac{w}{r}$. Dieser Wehrt für u in (92) gesezt, wird diese Gleichung

$$o = n - \frac{n(nn-1)w^2}{1.2.3.4.r^2} \; . \; . \; . \; \mp \frac{w^{n-1}}{r^{n-1}}$$

oder

95) $$o = nr^{n-1} - \frac{n(nn-1)}{1.2.3.4} r^{n-3} w^2 \; . \; . \; \mp w^{n-1}$$

Eben diese Substitution verwandelt (94) in diese Gleichung,

96) $$o = \tfrac{1}{2} nr^{n-2} - \frac{n(nn-4)}{1.2.3.8} r^{n-4} w^2 \; . \; . \; \pm w^{n-2}$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind die Diagonalen des Vielecks von n Seiten für den Halbmesser $= r$, den Durchmesser für (96) aus ihnen weggelassen. Ohne auf das Zeichen zu sehen, welches ihnen vorgesezt werden muß, ist ihr Product in der erstern Gleichung $= nr^{n-1}$, in der zweyten $= \frac{1}{2} nr^{n-2}$. Sezt man zu diesem leztern Product den weggelassenen Durchmesser 2r hinzu, so wird es $= nr^{n-1}$, und man erhält also folgenden Lehrsatz.

97) In einem jeden ordentlichen Vieleck von n Seiten, für den Halbmesser $= r$, ist $nr^{n-1} =$ dem Producte aus allen Diagonalen und zwey Seiten, welche mit jenen aus demselben Winkelpunkte gezogen werden, als welche man auch wie Diagonalen betrachten kan.

XXXI.

Wenn man in einem Cirkel, dessen Halbmesser $= r$ ist, an alle Winkelpunkte eines eingeschriebenen Vielecks von n Seiten die Halbmesser zieht, so ist das Product aus ihnen allen $= r^n$. Dis Product verwandelt sich in nr^{n-1}, wenn man statt des Mittelpunktes eine Ecke des Polygons nimt, und von da nach allen Winkelpunkten desselben die Diagonalen zieht. Wenn man nun auf dem Halbmesser OA (Fig. 10. 11.) oder auf demselben verlängert, einen Punkt P nimt, und aus diesem an alle Winkelpunkte eines Polygons B, C, D, ꝛc. den einen oder die beyde ausgenommen, wodurch der Durchmesser geht, die Linien PB, PC, PD ꝛc. zieht, so muß das Product dieser Linien eine solche Form bekommen, daß es, wenn n ungerade ist, für OP $= r$ werde $= nr^{n-1}$ und r^{n-1} für OP $= 0$, und daß es, wenn n gerade ist, in jenem Falle $\frac{1}{2}nr^{n-2}$, in diesem r^{n-2} werde. Diese Form zu finden, muß man den Wehrt einer Chorde AB durch PB und die beständigen Grössen AP und AO auszudrükken suchen. Dieser Wehrt in (95, 96) für w substituirt, entsteht eine Gleichung, deren Wurzeln die Linien PB, PC ꝛc. sind. Man braucht hier aber nur das bekannte Glied zu suchen.

Man beschreibe demnach über dem Durchmesser AB (Fig. 12.) aus dem Mittelpunkt O den Halbcirkel ABC; ziehe von dem Endpunkt des Durchmessers A eine willkührliche Chorde AB, und von einem Punkt P des Durchmessers, der auch auf der Verlängerung desselben genommen wer-

werden kan, die Linie PB, und lasse von B auf AC das Perpendikel BI herab. Nun ist PBqu $= ABqu + APqu - 2AP.\ AB.\ \cos.\ A$ (15) oder wenn man für AB. cos. A seinen Wehrt $\pm$ AI schreibt, nachdem A spitz oder stumpf ist, so hat man

$$PBqu = ABqu + APqu \mp 2AP.\ AI.$$

$$= ABqu + APqu \mp 2AP.\ \frac{ABqu}{2AO}$$

$$= ABqu\ \frac{(AO \mp AP)}{AO} + APqu$$

$$= \frac{ABqu.\ OP}{AO} + APqu.$$

Hieraus folgt $ABqu = (PBqu - APqu)\ \frac{AO}{OP}$.

Oder in Zeichen, wenn $AB = w$; $PB = t$, $AO = r$, $OP = a$, $AP = r - a$, so ist

$$ww = \frac{r}{a}\,(tt - (r - a)^2).$$

Wenn man diesen Wehrt für ww in (95) sezt, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln statt der Chorden AB, AC ꝛc. die Linien PB, PC ꝛc. sind (Fig. 10. 11). Aus jedem Theile der Gleichung (95) entsteht eine Folge von Gliedern, die Potenzen von t enthalten, nebst einem, worin diejenige Potenz von $(r - a)\sqrt{\frac{r}{a}}$ vorkömt, auf

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

welche w in der Gleichung erhoben war. Die Potenzen von r, a und r-a, und die Producte, die aus ihnen gemacht werden, in den Gliedern, welche kein t enthalten, sind nach der Ordnung der Theile der Gleichung, woraus sie entstanden sind, folgende; r^{n-1}; $\frac{r^{n-2}(r-a)^2}{a}$; $\frac{r^{n-3}(r-a)^4}{a^2}$

$$\ldots \frac{(r-a)^{n-1}.\ r^{(n-1):2}}{a^{(n-1):2}}$$

Jedes Product enthält n-1 Factoren, wenn man für die Factores des Divisors eben soviel aus dem Dividendus abrechnet, oder ihre Dimension ist vom (n-1)ten Grade. Ein Factor wie $\frac{r}{a}$, $\frac{rr}{aa}$ u. s. w. wird für keine Dimension, sondern für einen numerischen Coefficienten gerechnet.

Man gedenke sich die ganze Gleichung mit $a^{(n-1):2} : r^{(n-1):2}$ multiplicirt, so enthalten die gegebenen Theile der Gleichung lauter Producte aus Potenzen von r und a, nemlich r^{n-1}, ar^{n-2}, a^2r^{n-3} . . $a^{n-2}r$, a^{n-1}. Weder a noch r kan auf eine höhere Potenz als die (n-1)te steigen, weil vorher die Producte nur von der (n-1)ten Dimension waren, welche durch die Multiplication mit einem Zahlcoefficienten, wie $a^{(n-1):2} : r^{(n-1):2}$, nicht geän-

geändert wird. Es kan auch weder a noch r als Divisor vorkommen, weil $a^{(n-1):2}$ die höchste Potenz von a ist, welche in dem Nenner, und $r^{(n-1):2}$ die niedrigste von r, welche in dem Zähler der Producte vorkömt. Und daher muß der Exponent der Potenz von r soviel wachsen oder abnehmen, als der von der Potenz von a abnimt oder wächst.

Man gedenke sich die bekannten Theile der Gleichung aus allen Gliedern derselben gesammelt, und die, welche einerley Producte von r und a enthalten, zusammengenommen, so wird diese Summe folgende Gestalt haben, $Ar^{n-1} + Bar^{n-2} + Ca^2r^{n-3} \; . \; . \; Pa^{n-2}r + Qa^{n-1} = \Sigma$, wo A, B, C, 2c. die Zahlcoefficienten sind, welche in die Producte von a und r multiplicirt werden. Diese Summe jedesmahl als positiv betrachtet, ist demnach das Product aller der Wehrte, welche t hat, die negativen bloß der Grösse nach betrachtet. Soll nun das Product $= r^{n-1}$ für OP oder $a = 0$ werden, so muß $A = 1$ seyn. Soll es nr^{n-1} für $a = r$ werden, so ist die natürlichste Supposition, die sich gleich anbietet, $B = 1$, $C = 1$, und jeden folgenden Coefficienten $= 1$ zu setzen. Diese Voraussetzung muß nur noch bestätiget werden. Man formire für ein Vieleck von $n + 2$ Seiten eine ähnliche

Summe, wie Σ, nemlich, $\mathfrak{A}r^{n+1} + \mathfrak{B}ar^n + \mathfrak{C}a^2r^{n-1} \ldots + \mathfrak{Q}a^{n-1}r^2 + \mathfrak{R}a^nr + \mathfrak{S}a^{n+1}$. Diese wird $(n+2)r^{n+1}$, wenn $a = 1$ ist, oder sie entsteht in diesem Fall aus der Reihe Σ durch r^2 multiplicirt, und um $2r^{n+1}$ vergrössert. Da nun die Coefficienten kein a oder r enthalten, so ist es gleichgültig, was a für einen Wehrt hat, um die eine Summe aus der andern herzuleiten. Man muß nur zu dem Ende Σ mit r^2 multipliciren, und die Producte a^nr, a^{n+1}, welche durch diese Multiplication nicht hervorgebracht werden, mit ihren Coefficienten zusetzen, und es ist daher überhaupt, $(Ar^{n-1} + Bar^{n-2} \ldots + Qa^{n-1})r^2 = \mathfrak{A}r^{n+1} + \mathfrak{B}ar^n \ldots \mathfrak{Q}a^{n-1}r^2$. Also muß $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, u. s. w. seyn, oder die Coefficienten A, B, C ꝛc. hangen von n nicht ab. Da sie nun von r und a auch nicht abhängen, so ist nichts übrig, was ihnen eine verschiedene Grösse geben könnte. Sie sind gleich; und da $A = 1$ ist, so ist jeder, der nicht $= 0$ ist, auch $= 1$. Ihre Summe ist aber $= n$, so wie ihre Anzahl, folglich kan keiner $= 0$ seyn.

Es ist demnach das Product aller Wehrte von r für ein ungerades n dieses, $r^{n-1} + ar^{n-2} + a^2r^{n-3} \ldots + a^{n-2}r + a^{n-1}$. Dis ist das Product PB. DC. PD. ꝛc. der Linien, welche, AP ausgenommen, (Fig. 10.) von P aus an die Winkelpunkte eines Vielecks von einer ungeraden Anzahl Seiten (n) gezogen werden. Man setze den Factor $AP = r - a$ hinzu, so wird das Product PA. PB. PC. etc. $= r^n - a^n$.

Wenn

Wenn man für ein gerades n in (96) statt w seinen Wehrt durch r setzet, so bekömt der gegebene Theil der Gleichung die Gestalt $Ar^{n-2} + Bar^{n-3} + Ca^2r^{n-4} \ldots + Pa^{n-3}r + Qa^{n-2}$. Man formire für ein Vieleck von $n+2$ Seiten eine ähnliche Summe, $\mathfrak{A}r^n + \mathfrak{B}ar^{n-1} + \mathfrak{C}a^2r^{n-2} \ldots \mathfrak{Q}a^{n-2}r^2 + \mathfrak{R}a^{n-1}r + \mathfrak{S}a^n$. Jene wird $= r^{n-2}$ für $a = 0$, und diese $= r^n$ für eben diesen Wehrt von a. Es ist also $A = \mathfrak{A} = 1$. Jene wird $= \frac{1}{2}nr^{n-2}$ für $a = r$, und diese $= \frac{1}{2}(n+2)r^n$. Sie entsteht also in diesem Fall aus jener, wenn dieselbe durch r^2 multiplicirt und um r^n vergrössert wird. Weil aber die Coefficienten von a nicht abhängen, so ist es gleichgültig, was a für einen Wehrt hat, wenn man die eine Summe aus der andern herleiten will, und es ist demnach überhaupt, $Ar^n + Bar^{n-1} + Ca^2r^{n-2} \ldots + Qa^{n-2}r^2 = \mathfrak{A}r^n + \mathfrak{B}ar^{n-1} + \mathfrak{C}a^2r^{n-2} \ldots + \mathfrak{Q}a^{n-2}r^2$, wie vorher. Folglich ist $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $Q = \mathfrak{Q}$. Die beyden lezten Coefficienten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ müssen aber so beschaffen seyn, daß sie zusammen $= 1$ sind, weil für $a = r$ dis ihre Summe ist. Weil also die Coefficienten von n nicht abhängen, so sind sie alle einander gleich, diejenigen nemlich, die nicht $= 0$ sind. Da wir nemlich alle mögliche Producte aus a und r gemacht haben, so ist es möglich, daß einige davon nicht vorhanden sind, und der Schluß von der Gleichheit der Coefficienten geht auch nur auf die würklich vorhandenen. Es ist aber $A = 1$, also jeder Coefficient, der nicht $= 0$ ist, ist $= 1$. Da nun $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} = 1$,

so ist einer von beyden = o, und so überhaupt ist von je zwey Coefficienten von Ende an gerechnet, einer = o, daß die Exponenten zweyer nächstfolgender Potenzen von r um 2 unterschieden sind. Da aber die Potenz zu A gehörig, nemlich r^n in der Summe vorkömt, so kommen alle Potenzen mit geraden Exponenten darin vor, und die mit ungeraden fehlen. Es ist demnach für ein gerades n der gesuchte gegebene Theil der Gleichung dieser, $r^{n-2} + a^2 r^{n-4} + a^4 r^{n-6} \ldots a^{n-4} r^2 + a^{n-2}$, welcher $= \frac{1}{2} n r^{n-2}$ für a = r wird. Dis ist das Product aller Wehrte von t, oder das Product PB. PC. 2c., der Linien, welche (Fig. 11.) von P aus an alle Winkelpunkte eines Vielecks von einer geraden Anzahl Seiten (n) gezogen werden, die beiden ausgenommen, wodurch der Durchmesser geht. Setzt man den Factor AP. PD = (r—a) (r + a) = rr — aa hinzu, so wird das Product aller dieser Linien = $r^n — a^n$, wie für ein ungerades n. Alle diese Schlüsse gelten auch, wenn der Punkt P auf dem verlängerten Halbmesser ausserhalb des Cirkels fällt, nur daß alsdenn das gefundene Product = $a^n — r^n$ wird, weil man izt das Product der Wehrte von t durch a — r oder aa — rr multipliciren muß.

XXXII.

Man bekömt also folgenden sehr artigen Lehrsatz:

98) **Wenn man in einem ordentlichen Vieleck von n Seiten für den Radius = r den Halbmesser durch einen Winkelpunkt dessel-**

desselben zieht, und auf demselben oder dessen Verlängerung einen Punkt P nimt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $= a$ ist, so ist das Product von allen Linien, welche aus diesem Punkte an alle Winkelpunkte des Vielecks gezogen werden, gleich dem Unterschiede zwischen der nten Potenz des Halbmessers und derselben von der gedachten Entfernung; oder es ist dis Product $= r^n - a^n$, wenn $r > a$, oder $= a^n - r^n$, wenn $r < a$.

Wenn man die Zahl der Seiten verdoppelt, oder sie 2n nimt, (Fig. 13.) und wiederum nach allen Winkelpunkten A, a, B, b, C, c, ꝛc. des Vielecks Linien von einem Punkte P auf dem Halbmesser OA zieht, so ist ihr Product $= r^{2n} - a^{2n}$. Dieses durch das Product der Linien PA, PB, PC, welche nach den Winkelpunkten eines Vielecks von n Seiten gezogen werden, und welches $= r^n - a^n$ ist, dividiret, gibt zum Quotienten $r^n + a^n$.

99) Demnach sind die Factoren der zweytheilichten Grösse $r^n - a^n$, die Linien PA, PB, PC ꝛc., welche man in einem Cirkel, dessen Halbmesser $= r$ ist, von einem Punkte P, dessen Entfernung vom Mittelpunkt $= a$ ist, an alle Winkelpunkte eines Vielecks von 2n Seiten ziehen kan, je einen um den andern genommen, und den Anfang von dem gemacht, durch welchen OP geht.

Und die Factores der Grösse $r^n + a^n$ sind die Linien, welche von P an die übrigen

zwischen jenen fallende Winkelpunkte gezogen werden.

Dieser Satz heißt von seinem Erfinder der Cotesianische Lehrsatz. Smith, der Herausgeber der Cotesianischen Werke, hat ihn aus Cotesens Papieren herausgesucht, und in der Harmonia mensurarum p. 114. mitgetheilt, aber ohne Beweis. Pemberton hat in einem Briefe, der diesem Werke beygefügt ist, S. 13-28, einen Beweis gegeben, der aber so weitläuftig ist, daß man nicht wenig Gedult haben müste, ihn durchzugehen. Joh. Bernoulli hat einen bessern und leichtern Beweis davon aufgesetzt, den man in seinen Werken T. IV. p. 67. findet. Der gegebene kömt mit demselben überein, nur daß ich statt der Rechnung, welche Bernoulli für die erstern geraden und ungeraden Wehrte von n würklich macht, ein Raisonnement an die Stelle gesezt habe, um die Unannehmlichkeit der Rechnung zu vermeiden, und den Beweis allgemeiner zu machen. Ueberhaupt wäre es dem Vortrage der Mathematik zuträglich, wenn man öftrer versuchte, die Rechnung durch ein Raisonnement abzukürzen, oder zu überschlagen. Jene wird immer beschwerlich, wenn man die Schlußfolge der Begriffe nicht mehr deutlich darin erblickt, und blosse Rechnungsvortheile versüßen die Arbeit nur wenig. Dieses bleibt immer unterhaltend und befriedigend. Eine Verbesserung der Rechnung, wie die gedachte, aber im Grossen, wird vermuthlich die seyn, welche wir von dem Herrn Euler, nach einem Briefe desselben an die

Kö-

Königl. Akad. zu Berlin (allgem. deutsche Bibl. 8. B. 2. St.) zu erwarten haben. Er zeigt darin an, daß er eine Methode erfunden habe, die Bewegung des Mondes, welche bisher so unermesliche Rechnungen erfodert hat, auf eine philosophische Berechnung zu bringen. Unter den Erfindungen der neuern Mathematik wird diese einen sehr hohen, vielleicht den höchsten Rang, behaupten.

XXXIII.

Man kan die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel aus denselben der einfachen auch noch auf andere Art, nemlich durch die beständige Hinzusetzung des einfachen Winkels, aus (25, 27) finden. Es sey der einfache Winkel $= z$, $\sin. z = x$, $\cos. z = y$, so ist

erstlich $\sin. 2z = 2xy$ und $\cos. 2z = yy - xx$.

Ferner $\sin. 3z = \sin. 2z. \cos. z + \sin. z. \cos. 2z = 2xyy + xyy - x^3 = 3xyy - x^3$.

Und $\cos. 3z = \cos. 2z. \cos. z - \sin. 2z. \sin. z = y^3 - xxy - 2xxy = y^3 - 3x^2 y$.

Weiter ist $\sin. 4z = \sin. 3z. \cos. z + \sin. z. \cos. 3z = 3xy^3 - x^3 y + xy^3 - 3x^3 y = 4xy^3 - 4x^3 y$.

Und $\cos. 4z = \cos. 3z. \cos. z - \sin. 3z. \sin. z = y^4 - 3x^2 y^2 - 3x^2 y^2 + x^4 = y^4 - 6x^2 y^2 + x^4$.

Man bemerkt hiebey leicht, daß die Formeln für den Sinus und Cosinus des vielfachen Winkels aus den Gliedern der Potenz des Binomium $y + x$, deren Exponent die Zahl des Vielfachen von dem Winkel ist, bestehen, und daß die geraden Glieder, nemlich das zweyte, vierte, u. ff.

für den Sinus, die ungeraden für den Cosinus des vielfachen, beydemahl mit abwechselnden Zeichen gehören. Die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu beweisen, formire man erstlich die Potenz $(y + x)^n = y^n + Axy^{n-1} + Bx^2y^{n-2} + Cx^3y^{n-3} +$ etc. Nun setze man, daß

$$\sin. nz = Axy^{n-1} - Cx^3y^{n-3} + Ex^5y^{n-5} - \text{etc.}$$

und

$$\cos. nz = y^n - Bx^2y^{n-2} + Dx^4y^{n-4} - Fx^6y^{n-6} + \text{etc.}$$, so ist

$$\sin. (n+1)z = \sin. nz \cos. z + \sin. z. \cos. nz =$$
$$Axy^n - Cx^3y^{n-2} + Ex^5y^{n-4} - \text{etc.}$$
$$+ xy^n - Bx^3y^{n-2} + Dx^5y^{n-4} - \text{etc.}$$
$$= (1+A)xy^n - (B+C)x^3y^{n-2} + (D+E)x^5y^{n-4} - \text{etc.}$$

und

$$\cos. (n+1)z = \cos. nz. \cos. z - \sin. nz. \sin. z =$$
$$y^{n+1} - Bx^2y^{n-1} + Dx^4y^{n-3} - Fx^6y^{n-5} + \text{etc.}$$
$$- Ax^2y^{n-1} + Cx^4y^{n-3} - Ex^6y^{n-5} + \text{etc.}$$
$$= y^{n+1} - (A+B)x^2y^{n-1} + (C+D)x^4y^{n-3} - (E+F)x^6y^{n-5} + \text{etc.}$$

Nun ist aus der Formation der Potenzen eines Binomium $y + x$ bekannt, daß wenn die Coefficienten von x und y in dem Wehrte von $(y + x)^n$ die Grössen 1, A, B, C, D, E, F, ꝛc. sind, alsdenn die Coefficienten in dem Wehrte von $(y + x)^{n+1}$ diese werden, 1, $(1 + A)$, $(A+B)$, $(B+C)$, $(C+D)$, $(D+E)$, $(E+F)$ ꝛc.*

Wenn

* S. Kästners Anal. endl. Grössen §. 123.

Wenn also für einen Wehrt von n die Coefficienten in dem Wehrte von $\sin. nz$ und $\cos. nz$ die Binomialcoefficienten der Potenz $(y + x)^n$ sind, so sind sie in dem Wehrte von $\sin. (n+1)z$ und $\cos. (n+1)z$ eben so die Binomialcoefficienten der nächsthöhern $(n+1)$ten Potenz von $(y+x)$. Sie sind es aber für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$; also auch für $n = 5$, folglich auch für $n = 6$, und so ferner für alle folgende ganze Zahlen. Die Binomialcoefficienten, deren Stelle durch eine gerade Zahl angedeutet wird, werden für $\sin. (n+1)z$ wie für $\sin. nz$ genommen, und die, welche die erste, dritte u. s. f. Stelle einnehmen, gehören zu dem Wehrte von $\cos. (n+1)z$, wie sie zu dem von $\cos. nz$ genommen wurden. Die Zeichen wechseln für den Sinus und Cosinus des nächsthöhern vielfachen Winkels so ab, wie sie in dem Wehrte des Sinus und Cosinus des nächstvorhergehenden Vielfachen gesezt wurden, und für beyde wird die Folge der Exponenten von x und y nach demselben Geseze bestimt. Das angenommene Gesez ist also allgemein richtig, und, wenn man für A, B, C ꝛc. ihre Wehrte sezt, so erhält man

$$100)\ \sin. nz = n \sin. z. \cos. z^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \sin. z^3 \cos. z^{n-3}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \sin. z^5 . \cos. z^{n-5}$$

$$- \text{etc.}$$

101)

$$101)\ \text{cos.}nz = \text{cos.}z^n - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\,\text{sin.}z^2.\text{cos.}z^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}\,\text{sin.}z^4.\text{cos.}z^{n-4} - \text{etc.}$$

$$102)\ \text{tang}\,nz = \Big(n\,\text{tang.}z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}\,\text{tang.}z^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}\,\text{tang.}z^5\,\text{etc.}\Big) : \Big(1 - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\,\text{tang.}z^2$$
$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}\,\text{tang.}z^4 - \text{etc.}\Big)$$

Die lezte Formel entsteht aus den beyden erstern, wenn man die (100) durch die (101), und in dem Wehrte von $\frac{\text{sin. }nz}{\text{cos.}nz} = \text{tang. }nz$, Zähler und Nenner durch cos. z^n dividirt. Zu bemerken ist noch, daß die Exponenten von sin. z, cos. z, tang. z nicht zu den Winkeln, sondern zu ihren Sinus rc. gehören.

Diese Formeln gelten, welches wohl zu merken ist, nicht allein, wenn n eine gerade Zahl ist, sondern auch, wenn es eine gebrochene oder irrationale bedeutet, wie izt soll gezeigt werden.

XXXIV.

Aus den Formeln (100, 101) läßt sich sin. z und cos. z durch sin. nz und cos. nz auf folgende Art durch Näherung ausdrücken. Es ist

sin. z

$\sin. z = \frac{1}{n} \sin. nz. \cos. z^{1-n} \mp \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$. $\sin. z^3. \cos. z^{-2}$ .... und $\cos. z^n = \cos. nz \mp \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \sin. z^2. \cos. z^{n-2}$ ... Folglich ist der erste Theil des Wehrtes von $\cos. z = \cos. nz^{\frac{1}{n}}$. Hieraus ergibt sich von $\sin. z$ der erste Theil $= \frac{1}{n} \sin. nz. \cos. nz^{\frac{1-n}{n}}$, und dieser nebst dem von $\cos. z$ in $\cos. z^n$ substituirt, gibt $\cos. z^n = \cos. nz \mp \frac{n(n-1)}{1.2.nn} \sin. nz^2. \cos. nz^{-1} .. = \cos. nz - \frac{(1-n)}{1.2.n.}$ $\sin. nz^2. \cos. nz^{-1}$ ... und $\cos. z = \cos. nz^{\frac{1}{n}}$. $- \frac{1-n}{1.2.nn} \sin. nz^2. \cos. nz^{1:n-2}$ ... * wie man auch unmittelbar aus (101) erhält, wenn man den vielfachen und einfachen Winkel mit einander verwechselt, und $\frac{1}{n}$ statt n schreibt. Daraus wird $\cos. z^{1-n} = \cos. nz^{\frac{1-n}{n}} - \frac{(1-n)^2}{1.2.nn} \sin. nz^2$.

(cos.

* Anm. Nach dem Binomischen Lehrsatz, welcher auch von gebrochenen Exponenten gilt. S. den Anhang.

$$(\cos. nz^{\frac{1}{n}})^{-n} . \cos. nz^{\frac{1}{n}-2} = \cos. nz^{\frac{1-n}{n}}$$

$$- \frac{(1-n)^2}{1.2.nn} \sin. nz^2 . \cos. nz^{\frac{1}{n}-3}$$, und der zweyte Theil dieses Wehrtes in $\frac{1}{n} \sin.nz. \cos.z^{1-n}$ substituirt, wird das zweyte Stück dieses ersten Theils von $\sin. z = - \frac{(1-n)^2}{1.2.n^3} \sin.nz^3 . \cos.nz^{\frac{1}{n}-3}$

Wenn man nun auch in dem zweyten Theil von sin. z den ersten Theil von sin. z und cos. z substituirt, so wird das erste Stück desselben =

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3.n^3} \sin.nz^3 . \cos.nz^{\frac{1}{n}-3} =$$

$$- \frac{(1-n)(n-2)}{1.2.3.n^3} \sin. nz^3 . \cos. nz^{\frac{1}{n}-3},$$

und dieses zu dem zulezt gefundenen Stück von sin. z addirt, erhält man den zweyten Theil des Wehrtes von $\sin. z = - \frac{(1-n)(1-2n)}{1.2.3.n^3} \sin. nz^3 .$

$$\cos. nz^{\frac{1}{n}-3} .$$

Es

Es ist also $\sin.z = \frac{1}{n} \sin.nz.\ \cos.nz^{\frac{1}{n}-1}$

$- \frac{(1-n)(1-2n)}{1.\ 2.\ 3.n^3} \sin.nz^3.\ \cos.nz^{\frac{1}{n}-3}$ .... wie man aus (100) findet, wenn man den einfachen und vielfachen Winkel mit einander verwechselt, und $\frac{1}{n}$ statt n schreibt.

Wenn man mit den beyden gefundenen Theilen der Wehrte von sin. nz und cos. nz so verfährt, wie mit dem ersten geschehen ist, so erhält man den dritten Theil ihrer Wehrte, und so immer mehrere. Aber die Rechnung wird je länger je weitläuftiger. Wir müssen also versuchen, das schon bemerkte Gesetz auf eine bequemere Art zu erweisen.

Bey der Reihe, welche den sin. z und cos. z durch sin. nz und cos. nz ausdrückt, hat man auf zweyerley zu sehen, auf die Coefficienten mit ihren Zeichen, und auf die Folge der Exponenten von den Potenzen des sin. nz und cos. nz. Die lezten wollen wir zuerst vornehmen.

1. In den Formeln (100, 101) ist n = der Summe der Exponenten von sin. z und cos. z in jedem Gliede des Theils der Gleichung rechter Hand. Der sin. nz und cos. nz können daher als Producte aus n Factoren, oder als Grössen von n Dimensionen angesehen werden, und sind es auch, wenn

wenn man die $(n-1)$te Potenz der Einheit als Factor zu ihnen hinzufüget. Wenn man nemlich die Dimensionen der trigonometrischen Functionen zählen will, so muß man (1. Kap. X.) r sin. z, r cos. z statt sin. z, cos. z setzen. Dadurch kömt in jedem Gliede des Theils der Gleichung rechter Hand, die Potenz r^n als Factor, womit folglich auch der Theil rechter Hand muß multiplicirt werden, welcher r^n sin. nz wird. Es bedeutet aber r sin. nz den Sinus von nz für den Halbmesser r berechnet, welcher also in r^{n-1}, oder wenn man den Halbmesser zur Einheit nimt, in die $(n-1)$te Potenz derselben muß multiplicirt werden. Dieser Substitution überhoben zu seyn, braucht man nur sin. nz und cos. nz als Grössen von n Dimensionen zu betrachten, wenn dem sin. z, cos. z eine gegeben wird. Daher wird $\sin.\frac{1}{n}z$ als eine Grösse von der Dimension $\frac{1}{n}$ theil zu betrachten seyn, wovon nemlich n als Factoren genommen, eine Grösse von einer Dimension ausmachen. Und $\sin. nz^{\frac{1}{n}}$ ist eine Grösse von einer Dimension, so wie $\sin. nz^{\frac{2}{n}}$ von zwey, u. s. w.

2. Dis vorausgesezt, so werden die Theile der Reihe, welche den sin. z oder cos. z durch sin. nz, cos. nz ausdrückt, alle von der Dimension, Eins, seyn. Denn es ist überhaupt wahr, daß, wenn man

man aus einer gleichartigen Gleichung zwischen mehreren Grössen eine durch die übrigen sucht, der Wehrt derselben aus Theilen bestehen wird, welche mit ihr dieselbe Dimension haben. So werden die Theile der Gleichung (100) nachdem sie durch cos. z^{n-1} dividirt ist, von der Dimension Eins. Der Wehrt von sin. z, so weit man ihn mag berechnet haben, in (101) gesezt, läßt die Theile dieser Gleichung von n Dimensionen; und wenn man daraus den cos. z sucht, so werden die Theile des Wehrtes, es mögen sin. z und cos. z darunter noch vorhanden seyn oder nicht, auch von der Dimension, Eins; wenn man diesen Wehrt wieder in (100) substituirt, so bekommen dessen Theile die Dimension, welche dem Exponenten der Potenz von cos. z gleich ist, die herausgeschaft ward. Denn der Exponent der Potenz einer zwey- oder vieltheilichten Grösse, ist die Summe der Dimensionen von den Factoren jedes Theils dieser Potenz.

3. In der Reihe für sin. z kommen die ungeraden Potenzen von sin. nz nach der Reihe in Potenzen des cos. nz multiplicirt vor; in der Reihe für cos. z die geraden. Denn erstlich sind in der Gleichung (100) nur die ungeraden Potenzen von sin. z vorhanden. Sezt man für dieselben den ersten Theil des Wehrtes von sin. z, so erhält man wieder eine Folge von ungeraden Potenzen des sin. nz, und wenn man hieraus, ohne schon die Potenzen von cos. z herauszuschaffen, die ungeraden Potenzen von sin. z formirt, so erhält man lauter ungerade Potenzen von sin. nz

in den Wehrten der Potenzen des sin. z. Formirt man aber die geraden Potenzen von sin. z, so erhält man lauter gerade Potenzen des sin. nz. Diese in (101) gesezt, erhält man in den Wehrten des cos. z und dessen Potenzen, die durch Näherung gefunden werden, lauter gerade Potenzen des sin. nz, in Potenzen des cos. nz multiplicirt. Wenn nun diese Wehrte in (100) gesezt werden, so geben die ungeraden Potenzen des sin. nz daselbst in die geraden jener Wehrte multiplicirt, wiederum ungerade Potenzen des sin. nz.

4. Es ist also die allgemeine Form eines unbestimten Theiles von dem Wehrte des sin. z diese, $A \sin. nz^m. \cos. nz^{1:n-m}$, wo A den Coefficienten, und m eine ungerade Zahl bedeutet. Ist aber m gerade, so gilt diese Form für einen unbestimten Theil des Wehrtes von cos. z. Diese Form zeigt eine Grösse von der Dimension Eins, wie sin. z an. Es ist nemlich

$$\sin. nz^m. \cos. nz^{1:n-m} = \frac{\sin. nz^m. \cos. nz^{1:n}}{\cos. nz^m},$$

in welchem Ausdruck $\frac{\sin. nz^m}{\cos. nz^m}$ eine blosse Zahl ist, weil die Dimensionen des Zählers sich gegen eben so viele des Nenners aufheben. Die Grösse bleibt also einer von den n gleichen Factoren, worin cos. nz zerfällt werden soll; und da cos. nz eine Grösse von n Dimensionen ist, so ist $\cos. nz^{1:n}$ von der Dimension Eins.

5. Man

5. Man schreibe s für nz, $\frac{s}{n}$ für z, so bekommen sin. $\frac{1}{n}$s und cos. $\frac{1}{n}$s diese Form,

$$\sin.\frac{1}{n}s = \alpha \sin.s.\cos.s^{1:n-1} - \gamma \sin.s^3.\cos.s^{1:n-3}$$
$$+ \varepsilon \sin.s^5.\cos.s^{1:n-5} - \text{etc.}$$

$$\text{cs.}\frac{1}{n}s = \text{cs.}s^{1:n} - \beta \text{sn.}s^2.\text{cs.}s^{1:n-2} + \delta \text{sn.}s^4.\text{cs.}s^{1:n-4}$$
$$- \text{etc.}$$

Die griechischen Buchstaben bedeuten die Coefficienten, deren Grösse und Zeichen nun bestimt werden soll.

6. Der sin. $\frac{m}{n}$s und cos. $\frac{m}{n}$s werden, wenn m eine ganze Zahl ist, vermittelst der Formeln (100, 101) durch sin. $\frac{1}{n}$s und cos. $\frac{1}{n}$s ausgedrückt gefunden. Die Zahl der Dimensionen, welche die Producte aus diesen haben, ist m. Man setze an ihrer statt ihre Wehrte durch sin. s und cos. s ausgedrückt, so wird die Summe der Exponenten in dem Producte, die aus diesen leztern formirt werden, $\frac{m}{n}$ seyn. Der Wehrt von sin. $\frac{m}{n}$s wird wiederum ausser den Potenzen von cos. s nichts als ungerade Potenzen des sin. s, und der

von $\cos. \frac{m}{n} s$ die geraden enthalten. Folglich bekommen $\sin. \frac{m}{n} s$ und $\cos. \frac{m}{n} s$ diese Gestalt:

$$\sin. \frac{m}{n} s = A \sin. s . \cos. s^{m:n-1} - C \sin. s^3 . \cos. s^{m:n-3}$$
$$+ E \sin. s^5 . \cos. s^{m:n-5} - \text{etc.}$$

$$\cos. \frac{m}{n} s = \cos. s^{m:n} - B \sin. s^2 . \cos. s^{m:n-2}$$
$$+ D \sin. s^4 . \cos. s^{m:n-4} - \text{etc.}$$

7. Man nehme m für ein Vielfaches von n, nemlich $m = \alpha n$, daß α eine ganze Zahl bedeute, und gedenke sich die ganze Rechnung, wovon bis izt nur die Form gegeben ist, würklich verrichtet, aber so, daß man die beiden Factoren des Products αn nie getrennet habe, wenn es auch durch n zu dividiren gewesen ist, so müste man folgende Wehrte für die Coefficienten, vermöge (100, 101) gefunden haben:

$$A = \alpha n : n$$

$$B = \frac{(\alpha n : n)(\alpha n : n - 1)}{1 . \ 2}$$

$$C = \frac{(\alpha n : n)(\alpha n : n - 1)(\alpha n : n - 2)}{1 . \ 2 . \ 3}$$

etc. etc.

Es ist aber gleichgültig, ob man mit dem zusammengesezten Zeichen αn oder dem einfachen m rechnet. Man müste also die Coefficienten für m eben

eben so gefunden haben, wie für αn, und es ist daher, wenn m und n ganze Zahlen bedeuten,

$$103)\ \sin.\frac{m}{n}s = \frac{m}{n}\sin.s.\cos.s^{m:n-1}$$

$$-\frac{m(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3.\ n^3}\sin.s^3.\cos.s^{m:n-3}$$

$$+\frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)(m-4n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ n^5}\sin.s^5.\cos.s^{m:n-5}$$

$$-\text{etc.}$$

und $104)\ \cos.\frac{m}{n}s = \cos.s^{m:n} - \frac{m(m-n)}{1.2.n^2}\sin.s^2\cos.s^{m:n-2}$

$$+\frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ n^4}\sin.s^4.\cos.s^{m:n-4}$$

$$-\text{etc.}$$

8. Weil jede Irrationalzahl durch das Verhältnis zweyer Rationalzahlen so genau als man will, kan ausgedruckt werden, so liefern die gefundenen Gleichungen auch die Sinus und Cosinus zweyer Winkel, die ein Irrationalverhältnis haben, so genau als man will, die einen aus den andern bestimt. Da also diese Gleichungen zwischen ihnen niemals unrichtig werden, so nahe auch $\frac{m}{n}$ der vorgeschriebenen Irrationalzahl kömt, so gelten sie auch in völliger Schärfe, wenn man unter $\frac{m}{n}$ die Irrationalzahl selbst versteht.

9. Weil die Formeln (100. 101) für jeden Wehrt von n, es mag eine ganze, gebrochne oder irrationale Zahl seyn, gelten, so gilt auch die aus ihnen hergeleitete (102) für die Tangenten zweyer Winkel, deren Verhältnis, wie man will, beschaffen ist.

10. Es gehört zwar der Sinus des einfachen Winkels, wenn er aus dem gegebenen Sinus des vielfachen gefunden werden soll, zu mehrern Winkeln. (XIII. d. K.) Aber die Gleichung $\sin. z = \frac{1}{n} \sin. nz. \cos. nz^{1:n\cdot 1}$ — etc. liefert nur den, der zu dem Winkel $\frac{nz}{n}$ gehöret. Denn in der Gleichung (100) fand man den Sinus des vielfachen Winkels nz aus dem Sinus dieses einfachen z. Die Umkehrung der Reihe ist so angefangen, als wenn sin. z durch eine einfache Gleichung gegeben wäre, durch die, $\sin. z = \frac{1}{n} \sin. nz. \cos. nz^{1:n-1}$. Die Ergänzungen, welche zu diesem Wehrte hinzukommen, gehören zu keinem andern Sinus, als zu dem, welchen man aus dieser Gleichung findet, das ist, zu dem Sinus des Winkels $\frac{nz}{n} = z$.

Exempel. Es sey nz oder $s = 30°$, also $\sin. s = \frac{1}{2}$ $\cos. s = \surd(1 - \frac{1}{4}) = \surd\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\surd 3$; $m = 1$, $n = 3$,

daß

daß man also den sin. 10° sucht. So wird $\frac{\text{sin. s}}{\text{cos. s}}$ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$; cos. s$^{1:3} = (\frac{3}{4})^{1:6}$, und es ist sin. 10° =

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\tfrac{3}{4})^{1:6} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (\tfrac{3}{4})^{1:6}$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot (\tfrac{3}{4})^{1:6} - \text{etc.}$$

Die Rechnung geschicht durch die Logarithmen folgender massen.

$$\begin{aligned}
l.\ \tfrac{3}{4} &= 9,8750612 \\
\hline
\tfrac{1}{6}\,l.\ \tfrac{3}{4} &= 9,9791769 \\
l.\ \tfrac{1}{3} &= 9,5228788 \\
\tfrac{1}{2}\,l.\ \tfrac{1}{3} &= 9,7614394 \\
\hline
& 9,2634951 = l.\ 0,1834 +
\end{aligned}$$

Der folgende negative Theil ist ein $\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3}$ Theil des gefundenen, welchen man also durch $\frac{5}{81}$ zu multipliciren hat, wie folget.

$$\begin{aligned}
& 9,2634951 = l.\ 0,1834 + \\
l.\ 5 &= 0,6989700 \\
\hline
& 9,9624651 \\
l.\ 81 &= 1,9084850 \\
\hline
& 8,0539801 = l.\ 0,01132 + \\
\hline
\text{Untersch.} &= 0,1721
\end{aligned}$$

Den dritten Theil zu finden, muß man den zweyten durch $\frac{8.\ 11}{4.\ 5.\ 9.\ 3}$ oder $\frac{22}{135}$ multipliciren.

$$
\begin{array}{rl}
 & 8,0539801 = \text{l. } 0,01132 + \\
\text{l. } 22 = & 1,3424227 \\
\hline
 & 9,3964028 \\
\text{l. } 135 = & 2,1303338 \\
\hline
 & 7,2660690 = \text{l. } 0,001845 \\
 & \text{addirt } 0,1721 \\
\hline
 & 0,1739 +
\end{array}
$$

Die folgende negative Ergänzung ist $\frac{14.\ 17}{6.\ 7.\ 27}$ von der zuleztgefundenen, beynahe $\frac{6}{27}$ oder $\frac{2}{9}$. Sie ist also 0,0004 — und es wird daher sin. 10° = 0,1735 +. Aus den Tafeln findet man ihn 0,1736482.

XXXV.

Aus den Formeln (73, 83) lassen sich die Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Winkel durch die der vielfachen ausdrücken. Nemlich aus den Formeln (73) erhält man

$$\sin. z = \sin. z$$

$$4 \sin. z^3 = 3 \sin. z - \sin. 3z$$

$$16 \sin. z^5 = 15 \sin. z - 5 \sin. 3z - 5 \sin. z + \sin. 5z$$

$$= 10 \sin. z - 5 \sin. 3z + \sin. 5z$$

$$64\,\sin. z^7 = 70\,\sin. z - 35\,\sin. 3z + 7\,\sin. 5z$$
$$\qquad - 42\,\sin. z + 14\,\sin. 3z$$
$$\qquad + 7\,\sin. z$$
$$\qquad\qquad - \sin. 7z$$

$$64\,\sin. z^7 = 35\,\sin. z - 21\,\sin. 3z + 7\,\sin. 5z - \sin. 7z$$

u. s. w.

Die geraden Potenzen von $\sin. z$ zu erhalten, multiplicire man diese Gleichungen durch $2\,\sin. z$, und zerfälle die Producte aus zwey Sinus in den Unterschied zweyer Cosinus, nach der 45sten Formel, $2\,\sin. A.\,\sin. B = \cos.(A-B) - \cos.(A+B)$. So erhält man

$$2\,\sin. z^2 = 1 - \cos. 2z$$
$$8\,\sin. z^4 = 6\,\sin. z^2 - 2\,\sin. 3z.\,\sin. z = 3 - 3\,\cos. z$$
$$\qquad - \cos. 2z + \cos. 4z = 3 - 4\,\cos. 2z + \cos. 4z$$
$$32\,\sin. z^6 = 20\,\sin. z^2 - 10\,\sin. 3z.\,\sin. z + 2\,\sin. 5z.\,\sin. z$$
$$\qquad = 10 - 10\,\cos. 2z - 5\,\cos. 2z + 5\,\cos. 4z + \cos. 4z - \cos. 6z$$
$$\qquad = 10 - 15\,\cos. 2z + 6\,\cos. 4z - \cos. 6z$$
$$128\,\sin. z^8 = 70\,\sin. z^2 - 42\,\sin. 3z.\,\sin. z + 14\,\sin. 5z.$$
$$\qquad \sin. z - 2\,\sin. 7z.\,\sin. z$$
$$\qquad = 35 - 35\,\cos. 2z - 21\,\cos. 2z + 21\,\cos. 4z$$
$$\qquad + 7\,\cos. 4z - 7\,\cos. 6z - \cos. 6z + \cos. 8z$$
$$= 35 - 56\,\cos. 2z + 28\,\cos. 4z - 8\,\cos. 6z + \cos. 8z$$

Man hätte auf diese Art auch die Wehrte der ungeraden Potenzen vermittelst der Formel (43) erhalten können. Die Coefficienten in diesen Wehrten sind die Binomialcoefficienten aus derjenigen Potenz, welche mit der des $\sin. z$ denselben Exponenten hat, wenn man für einen ungeraden Exponenten die erste oder zweyte Hälfte derselben,

und für einen ungeraden die grössere nimt. Nur der Coefficient von $\cos. 0z$ ist halb so groß, als wie er nach dem Gesetze der Binomialcoefficienten würde gefunden werden. Die Ursache davon einzusehen, setze man, daß für eine unbestimte ungerade Potenz, wie in den berechneten, die Coefficienten nach diesem Gesetze gemacht werden. Es sey

$$2^{n-1}.\sin.z^n = A\sin.z - B\sin.3z + C\sin.5z - D\sin.7z + \text{etc.}$$

Also ist

$$2^n \sin.z^{n+1} = 2A\sin.z^2 - 2B\sin.3z.\sin.z + 2C\sin.5z.\sin z - 2D\sin.7z.\sin.z. + \text{etc.}$$

oder

$$\begin{aligned}2^n \sin.z^{n+1} &= A - A\cos.2z + B\cos.4z - C\cos.6z \ldots \\ &\quad - B\cos.2z + C\cos.4z - D\cos.6z \ldots \\ &= A - (A+B)\cos.2z + (B+C)\cos.4z \\ &\quad - (C+D)\cos.6z \ldots\end{aligned}$$

Die nte Potenz eines Binomium hat n+1 Glieder oder eine gerade Anzahl, wenn sie ungerade ist. Wenn also A, B, C, D, etc. die Binomialcoefficienten einer ungeraden nten Potenz sind, von der Mitte aus nach dem Anfang genommen, so kommen eben diese auch in der andern Hälfte vor, oder die Folge der Binomialcoefficienten von D an ist

- - D, C, B, A, A, B, C, D - - -

Hieraus entsteht nun die Folge dieser Coefficienten für die (n+1)te Potenz, bis auf den, der in der Mitte vom Anfang und Ende gleichweit entfernet ist,

- - (D+C), (C+B), (B+A), 2A.

Wenn

Wenn also für eine ungerade Potenz das bemerkte Gesetz richtig ist, so gilt es auch für die nächste gerade. Der mitlere Coefficient ist 2A für die Potenz des Binomium, aber A für die des Sinus. Diese Coefficienten der $(n+1)$ten Potenz seyn von dem mitlern an gerechnet, diese

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.}$$

so ist

$$2^n \sin.z^{n+1} = \tfrac{1}{2}\alpha - \beta \cos.2z + \gamma \cos.4z - \delta \cos.6z. \text{etc.}$$

und

$$2^{n+1}. \sin.z^{n+2} = \alpha \sin.z - 2\beta \cos.2z. \sin.z + 2\gamma \cos.4z. \sin.z - 2\delta \cos.6z. \sin.z$$

oder aus (43)

$$2^{n+1}. \sin.z^{n+2} = \alpha \sin.z - \beta \sin.3z + \gamma \sin.5z \; . \; . \; + \beta \sin.z - \gamma \sin.3z + \delta \sin.5z \; . \; . \; = (\alpha+\beta) \sin.z - (\beta+\gamma) \sin.3z + (\gamma+\delta) \sin.5z \; . \; .$$

Wenn aber . . $\delta, \gamma, \beta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ . . . die Folge der Binomialcoefficienten der $(n+1)$ten Potenz eines Binomium ist, so ist sie für die $(n+2)$te bis auf den lezten der erstern Hälfte diese: . . . $(\delta+\gamma)$, $(\gamma+\beta)$, $(\beta+\alpha)$. Wenn also das bemerkte Gesetz für eine gerade Potenz des sin. z gilt, so gilt es auch für die nächste ungerade, und daher auch, wie vorher gezeigt, wiederum für die nächste gerade. Es galt aber für die berechneten geraden und ungeraden Potenzen, also für alle folgenden. Aus der allgemeinen Berechnung ersieht man zugleich, wie die geraden Potenzen durch Cosinus, die ungeraden durch Sinus vielfacher Winkel entwickelt werden; wie die Folge dieser Winkel beschaffen ist; und wie die

die Potenzen der 2, mit den Potenzen des $\sin.z$ fortgehen.

Es sind also die Potenzen des $\sin.z$ folgende,

105) $\sin.z = \sin.z$

$2(\sin.z)^2 = 1 - \cos.2z$

$4(\sin.z)^3 = 3\sin.z - \sin.3z$

$8(\sin.z)^4 = 3 - 4\cos.2z + \cos.4z$

$16(\sin.z)^5 = 10\sin.z - 5\sin.3z + \sin.5z$

$32(\sin.z)^6 = 10 - 15\cos.2z + 6\cos.4z - \cos.6z$

$64(\sin.z)^7 = 35\sin.z - 21\sin.3z + 7\sin.5z - \sin.7z$

$128(\sin.z)^8 = 35 - 56\cos.2z + 28\cos.4z - 8\cos.6z + \cos.8z$

etc.

XXXVI.

Die Potenzen des Cosinus des einfachen Winkels durch die Cosinus der vielfachen ausgedrükt, findet man aus den Formeln (83) folgendermassen.

$2(\cos.z)^2 = 1 + \cos.2z$

$4(\cos.z)^3 = 3\cos.z + \cos.3z$

$8(\cos.z)^4 = -1 + 4 + 4\cos.2z + \cos.4z$

$= 3 + 4\cos.2z + \cos.4z$

$16(\cos.z)^5 = -5\cos.z + 15\cos.z + 5\cos.3z + \cos.5z$

$= 10\cos.z + 5\cos.3z + \cos.5z$

Man kan auch diese Potenzen unabhängig von jenen durch die fortgesezte Multiplication in $2\cos.z$ finden, wenn das Product zweyer Cosinus in die Summe zweyer Cosinus nach (44) verwandelt wird. So wird

$$32(\text{cos}.z)^6 = 20\,\text{cs}.z^2 + 10\,\text{cs}.3z.\text{cs}.z + 2\,\text{cs}.5z.\text{cs}.z$$
$$= 10 + 10\,\text{cos}.2z + 5\,\text{cos}.4z + \text{cos}.6z$$
$$+ 5\,\text{cos}.2z + \text{cos}.4z$$
$$= 10 + 15\,\text{cos}.2z + 6\,\text{cos}.4z + \text{cos}.6z$$

Das Gesetz der Fortschreitung ist hier eben dasselbe wie für die Sinus, und der Beweis ist auch derselbe.

Es ist also die Progreßion der Potenzen des cos.z

106) $\text{cos}.z = \text{cos}.z$

$2(\text{cos}.z)^2 = 1 + \text{cos}.2z$

$4(\text{cos}.z)^3 = 3\,\text{cos}.z + \text{cos}.3z$

$8(\text{cos}.z)^4 = 3 + 4\,\text{cos}.2z + \text{cos}.4z$

$16(\text{cs}.z)^5 = 10\,\text{cos}.z + 5\,\text{cos}.3z + \text{cos}.5z$

$32(\text{cs}.z)^6 = 10 + 15\,\text{cos}.2z + 6\,\text{cos}.4z + \text{cos}.6z$

$64(\text{cs}.z)^7 = 35\,\text{cos}.z + 21\,\text{cos}.3z + 7\,\text{cos}.5z + \text{cos}.7z$

etc.

XXXVII.

Durch Hülfe dieser Formeln kan man die Quadrate, die Würfel und die höhern Potenzen der Sinus und Cosinus solcher Winkel summiren, die in arithmetischer Progreßion fortgehen. Eine solche Summe zerfällt in Summen von Sinus oder Cosinus, deren Winkel auch in arithmetischer Progreßion sind, wovon man iede aus (67, 69) finden kan, und sie alsdenn zusammen nehmen muß.

Fünftes Kapitel

Erfindung der trigonometrischen Functionen aus den Winkeln und dieser aus jenen.

I.

Man lasse in den Formeln (100, 101, 102) den Winkel oder Bogen z ohne Ende abnehmen, und n dagegen wachsen, so daß $nz = v$, einem endlichen Bogen gleich bleibe. Dadurch nähert sich sin.z ohne Ende dem Bogen z, und cos.z dem Halbmesser = 1. Folglich wird n sin.z zulezt = nz = v. Ferner ist v die Grenze von (n—1) sin.z, als welches sich der Grösse n sin.z, oder dem Bogen v ohne Ende nähert, ie kleiner sin.z gegen n sin.z wird. Eben so ist v auch die Grenze von (n—2) sin.z, (n—3) sin.z u. s. w. Auch ist v die Grenze von n tang.z, (n—1) tg.z etc. Nun gilt die Gleichung, welche zwischen gewissen Grössen statt findet, auch von den Grenzen dieser Grössen, welche nichts anders als diese Grössen selbst, nur unter einer andern Gestalt ausgedrückt, sind. Durch diese Substitution der Grenzen statt der Grössen selbst, erhält man folgende Gleichungen.

107) $\sin. v = v - \frac{v^3}{1.\,2.\,3} + \frac{v^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{v^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} + \text{etc.}$

108) $\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\,2.} + \frac{v^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{v^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} + \text{etc.}$

109) $\text{tang}. v = \left(v - \frac{v^3}{1.\,2.\,3} + \frac{v^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \text{etc.}\right) : \left(1 - \frac{v^2}{1.\,2} + \frac{v^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \text{etc.}\right)$

oder, wenn man die Division würklich verrichtet,

110) $\text{tang}. v = v + \frac{v^3}{1.\,3} + \frac{2v^5}{1.\,3.\,5} + \frac{17v^7}{1.\,3.\,5.\,7.\,3} + \frac{2.\,31.\,v^9}{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,3} + \text{etc.}$

Das Gesetz dieser Reihe muß sehr zusammengesetzt seyn, daß die Coefficienten eine so wenig übereinstimmende Form haben. Um es einigermassen zu übersehen, setze man

$\text{tang}. v = v + Av^3 + Bv^5 + Cv^7 + Dv^9 + \text{etc.}$

$\cos. v = 1 - \alpha v^2 + \beta v^4 - \gamma v^6 + \delta v^8 - \text{etc.}$

so

so ist

$$
\begin{array}{lllllll}
\sin. v = v & + Av^3 & + Bv^5 & + Cv^7 & + Dv^9 & + \text{etc.} \\
 & - \alpha & - \alpha A & - \alpha B & - \alpha C & - \text{etc.} \\
 & & + \beta & + \beta A & + \beta B & + \text{etc.} \\
 & & & - \gamma & - \gamma A & - \text{etc.} \\
 & & & & + \delta & + \text{etc.}
\end{array}
$$

Wenn man in dieser Reihe die Coefficienten jeder Potenz von v mit den bekannten Coefficienten derselbigen Potenz in (107) vergleicht, so erhält man für jeden aus der Reihe für die Tangente eine Gleichung, woraus er bestimt wird. Nemlich zuerst ist $A - \alpha = - \frac{1}{1.2.3}$ oder $A = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{3}$. Ferner ist $B - \alpha A + \beta = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ oder $B = \alpha A - \beta + \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{2}{15}$.

Eben so ist

$$C = \frac{1}{3.5} - \frac{1}{1.2.3.4.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{17}{1.3.5.7.3}$$

u. s. w. Man erhält durch diese Methode die Coefficienten bequemer als durch die Division, und ersieht zugleich, daß jeder von allen vorher-

gehen-

gehenden abhängt, welche man also muß berechnet haben, wenn man einen finden will. Zu dem Gebrauch dieser Reihe hindert dis nichts, weil sie eben dazu dienen soll, die Tangente aus dem Bogen zu finden, wozu die folgenden Theile der Reihe nichts helfen, wenn man die vorhergehenden grössern (in dem Falle daß $v < 1$) nicht hat.

Die Cotangenten kan man durch eben diese Methode finden. Es ist nemlich $\cot.v.\ \sin.v = \cos.v.$ Dabey muß $\cot.v$ die Form, $v^{-1} + Av + Bv^3$ etc. haben, damit diese Reihe in die des Sinus multiplicirt alle gerade Potenzen von v^0 an gebe.

Man setze also

$$\cot.v = v^{-1} + Av + Bv^3 + Cv^5 + Dv^7 \ldots$$

$$\sin.v = v - \alpha v^3 + \beta v^5 - \gamma v^7 + \delta v^9 \ldots$$

so ist

$$\begin{array}{lllll} \cos.v = 1 + Av^2 & + Bv^4 & + Cv^6 & + Dv^8 & \ldots \\ \quad\quad\quad\;\; - \alpha & - \alpha A & - \alpha B & - \alpha C & \ldots \\ & + \beta & + \beta A & + \beta B & \ldots \\ & & - \gamma & - \gamma A & \ldots \\ & & & + \delta & \ldots \end{array}$$

Vergleicht man diese Coefficienten mit denen in der Reihe (108) so ist $A = \alpha - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2} = -\frac{1}{3}$. Ferner $B = -\frac{1}{1.2.3.3} - \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4} = -\frac{1}{3.5.3}$;

auch findet man $C = -\frac{2}{1.3.5.7.9}$; $D = -\frac{1}{1.3.5.7.9.5}$, so daß

III) $\mathrm{Cot.}\,v = \frac{1}{v} - \frac{1}{3}v - \frac{1}{3.5.3}v^3 - \frac{2}{3.5.7.9}v^5 - \frac{1}{3.5.7.9.5}v^7 - \mathrm{etc.}$

II.

Die Gleichung (107) wird $=0$, wenn $v=0$ oder ein vielfaches der halben Peripherie, ein positives oder negatives ist. Die halbe Peripherie sey $=\pi$, so sind der Gleichung

$$0 = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \mathrm{etc.}$$

Wurzeln diese, 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ etc. als welcher Bogen Sinus $=0$ sind. Also sind die Factoren dieser Gleichung folgende; v, $1+\frac{v}{\pi}$, $1-\frac{v}{\pi}$, $1+\frac{v}{2\pi}$, $1-\frac{v}{2\pi}$, $1+\frac{v}{3\pi}$, $1-\frac{v}{3\pi}$, etc. oder v, $1-\frac{vv}{\pi\pi}$; $1-\frac{vv}{4\pi\pi}$, $1-\frac{vv}{9\pi\pi}$, etc. Nemlich das Product aus diesen Factoren, deren

deren Zahl ohne Ende ist, gibt entwickelt eine Reihe, welche einerley Gestalt mit der vorgeschriebenen Gleichung hat, und mit ihr durch dieselben Wehrte von v, nemlich o, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ꝛc. und durch keine andere auf Null gebracht wird. Das Product und der Theil der Gleichung rechter Hand sind demnach dieselben, und es ist folglich

$$112)\ \sin.v = v\left(1 - \frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{vv}{9\pi\pi}\right).\left(1 - \frac{vv}{16\pi\pi}\right).\ \text{etc.}$$

$$= v\left(1 - \frac{v}{\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi}\right).\ \text{etc.}$$

Der cos. v wird = o, wenn v die Wehrte $\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, etc. bekömt. Dieses sind also die Wurzeln der Gleichung (108)

$$o = 1 - \frac{v^2}{1.2.} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Das Product $\left(1 - \frac{4vv}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4vv}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4vv}{25\pi\pi}\right)$ etc. bekömt mit dieser Gleichung eine ähnliche Ge-

stalt, und wird durch dieselben Wehrte von v auf Null gebracht. Es ist also

$$113)\ \cos.v = (1 - \frac{4vv}{\pi\pi})(1 - \frac{4vv}{9\pi\pi})(1 - \frac{4vv}{25\pi\pi}).\text{etc.}$$

$$= (1 - \frac{2v}{\pi})(1 + \frac{2v}{\pi})(1 - \frac{2v}{3\pi})(1 + \frac{2v}{3\pi})$$

$$(1 - \frac{2v}{5\pi})(1 + \frac{2v}{5\pi}).\ \text{etc.}$$

III.

Man drücke v durch sein Verhältnis zum rechten Winkel oder $\frac{1}{2}\pi$ aus; man setze nemlich

$v = \frac{m\pi}{2n}$, so erhält man

$$114)\ \sin.\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}(1 - \frac{mm}{4nn})(1 - \frac{mm}{16nn})$$

$$(1 - \frac{mm}{36nn})(1 - \frac{mm}{64nn}).\ \text{etc.}$$

oder $\sin.\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}(\frac{2n-m}{2n})(\frac{2n+m}{2n})(\frac{4n-m}{4n})$

$$(\frac{4n+m}{4n})(\frac{6n-m}{6n})(\frac{6n+m}{6n}).\ \text{etc.}$$

Ferner

Ferner

$$115)\ \cos.\frac{m\pi}{2n} = \left(1 - \frac{mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{25nn}\right)$$

$$\left(1 - \frac{mm}{49nn}\right).\ \text{etc.}$$

oder

$$\cos.\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)$$

$$\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right).\ \text{etc.}$$

IV.

Es ist $\sin.\frac{m\pi}{2n} = \cos.\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n}\right) = \cos.\frac{n-m}{2n}\pi$; und $\cos.\frac{m\pi}{2n} = \sin.\frac{n-m}{2n}\pi$. Man setze nun in den Formeln (114, 115), $n-m$ statt des dortigen m, so erhält man aus (114)

$$116)\ \sin.\frac{n-m}{2n}\pi = \cos.\frac{m}{2n}\pi = \left(\frac{n-m}{2n}\right)\pi\left(\frac{n+m}{2n}\right)$$

$$\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right).\ \text{etc.}$$

und aus (115)

$$117)\ \cos.\frac{n-m}{2n}\pi = \sin.\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right).\ \text{etc.}$$

V.

Wenn man die Formel (114) durch die (117) dividiret, so erhält man

$$118)\ 1 = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}.\ \text{etc.}$$

oder $\frac{1}{2}\pi = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.}.\ \text{etc.}$

oder

$$\frac{1}{2}\pi = 2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\left(1-\frac{1}{81}\right).\text{etc.}$$

Es ist nemlich das Product aus zwey nächsten geraden Zahlen $2n$, $2n+2$, dividirt durch das Quadrat der zwischen ihnen liegenden ungeraden Zahl $2n+1$, dieses; $\frac{4nn+2n}{4nn+2n+1} = \frac{4nn+2n+1}{4nn+2n+1}$

$$-\frac{1}{4nn+2n+1} = 1-\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

VI.

Hieraus findet man auch die Tangenten durch

Fa-

Factoren ausgedrückt; nemlich die Formel (114) durch die (116) dividirt, gibt

$$119)\ \text{tang.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right).\ \text{etc.}$$

und die Formel (114) durch die (115) dividirt, gibt

$$120)\ \text{tang.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}.\frac{m}{n-m}.\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}.\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}.\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}.\ \text{etc.}$$

Diese Formeln sind zwar nicht bequem, die Peripherie, die Sinus, Cosinus und Tangenten zu finden, weil man gar zu viele Factores braucht. Sie thun aber vortrefliche Dienste, die Logarithmen dieser Grössen zu berechnen, wovon gleich unten ein mehrers.

VII.

Man setze in der Gleichung (103), $m = 1$, schreibe v für s, multiplicire sie durch n, und verwechsele die Zeichen je zweyer Factoren, wobey die Producte aus ihnen ihr Zeichen ungeändert behalten, so wird die Gleichung diese;

$$n\,\text{sin.}\ \frac{1}{n}\,v = \text{sin.}\,v.\ \text{cos.}\,v^{1:n-1} - \frac{(n-1)\,(2n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ n^2}.$$

 sin.

$$\sin.v^3.\cos.^{1:n-3} \mp \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ n^4}.$$

$$\sin.v^5 \cos.v^{1:n-5} - \text{etc.}$$

die sich auch, weil $\cos.v^{1:n-1} = \frac{\cos.v^{1:n}}{\cos.v}$;

$\cos.v^{1:n-3} = \frac{\cos.v^{1:n}}{\cos.v^3}$ u.s.w. und $\frac{\sin.v}{\cos.v} = \text{tang}.v$,

so ausdrücken läßt:

$$n\sin.\frac{1}{n}v = \text{tg}.v.\text{cs}.v^{1:n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ n^2}\text{tg}.v^3.\text{cs}.v^{1:n}$$

$$\mp \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ n^4}\text{tg}.v^5.\text{cs}.v^{1:n} - \text{etc.}$$

Man setze nun, daß n ohne Ende wachse, so ist $\frac{1}{n}v$ die Grenze von $\sin.\frac{1}{n}v$; $n.\frac{1}{n}v = v$ die Grenze von $n\sin.\frac{1}{n}v$; und 1, 2, 3, 4, etc. folgweise die Grenzen von $\frac{n-1}{n}$; $\frac{2n-1}{n}$; $\frac{3n-1}{n}$; $\frac{4n-1}{n}$, etc. und $\cos.v^0 = 1$ die Grenze von $\cos.v^{1:n}$. Diese Grenzen für die Grössen, welche sich ihnen ohne Ende nähern, gesezt, wird die Gleichung izt diese:

121)

121) $v = \text{tang.}\,v - \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,v^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang.}\,v^5 - \frac{1}{7}\,\text{tang.}\,v^7 + \frac{1}{9}\,\text{tang.}\,v^9 - \text{etc.}$

So zusammengesezt die Reihe (110) war, welche die Tangente durch den Bogen darstellt, so einfach ist ihre umgekehrte, welche den Bogen durch die Tangente ausdrückt.

VIII.

Man setze der Kürze wegen tang. v = t; und

sin. v = x, so ist $t = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}} = x\,(1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$

Man setze diesen Wehrt in (121) für t, so erhält man eine Reihe, welche den Bogen durch den Sinus liefert. Es ist nemlich nach dem binomischen Lehrsatz, der für jede Art von Exponenten gilt,

$$(1 - xx)^{-m:2} = 1 + \frac{m}{1.2}x^2 + \frac{m(m+2)}{1.\ 2.\ 4}x^4 + \frac{m(m+2)(m+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 8}x^6 + \frac{m(m+2)(m+4)(m+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 16}x^8 + \text{etc.}$$

also

$$+t = x + \frac{1}{1.2}x^3 + \frac{1.\ 3}{1.\ 2.\ 4}x^5 + \frac{1.\ 3.\ 5.}{1.\ 2.\ 3.\ 8}x^7 + \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 16}x^9 + \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{3}t^3 = -\tfrac{1}{3}x^3 - \frac{1}{1.2} - \frac{1.\ 5}{1.\ 2.\ 4} - \frac{1.\ 5.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 8} - \text{etc.}$$

$$+\tfrac{1}{5}t^5 = +\tfrac{1}{5} + \frac{1}{1.\ 2} + \frac{1.\ 7}{1.\ 2.\ 4} + \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{7}t^7 = -\tfrac{1}{7} - \frac{1}{1.\ 2} - \text{etc.}$$

$$+\tfrac{1}{9}t^9 = +\tfrac{1}{9} + \text{etc.}$$

$$-\text{etc.} = -\text{etc.}$$

$$v = x + \frac{1}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{1.\ 3}{1.\ 2.\ 4.\ 5}x^5 + \frac{1.\ 3.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 8.\ 7}x^7 + \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ [illegible]}x^9 + \text{etc.}$$

Es ist demnach

$$122)\quad v = \sin. v + \frac{1}{1.\,2.\,3}\sin. v^3 + \frac{1.\,3}{1.\,2.\,4.\,5}\sin. v^5$$

$$+ \frac{1.\,3.\,5}{1.\,2.\,3.\,8.\,7}\sin. v^7 + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{1.\,2.\,3.\,4.\,16.\,9}\sin. v^9$$

$$\ldots + \frac{1.\,3.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\,n.\,2^n\,(2n+1)}\sin. v^{2n+1}$$

$+$ etc.

Daß es für diese Reihe ein allgemeines Gesetz der Formation geben müsse, erhellt daraus, weil man vermittelst der Reihe für $(1-xx)^{-m:2}$ jeden Coefficienten durch die Zahl seiner Stelle finden kan, ohne die vorhergehenden zu wissen. Er hängt also bloß von dieser Zahl ab. Das Gesetz seiner Formation muß aber so beschaffen seyn, daß es den berechneten Gliedern allen gemein sey. Dieses gemeinschaftliche Gesetz ist dasienige, welches durch das unbestimte $(n+1)$te Glied ausgedrückt ist.

Die Formeln (121, 122) werden auch sehr bequem durch die Integralrechnung gefunden. * Ich habe sie nicht brauchen wollen, theils um die analytischen Sätze zu sparen, theils die Verwandschaft der gefundenen Formeln vollkommener zu zeigen.

IX.

Nunmehr ist es leicht, den Umfang des Cirkels durch den Halbmesser, und die Sinus nebst den andern trigonometrischen Functionen durch den zuge-

* S. Kästners Anal. unendl. Grössen §. 281. 299.

zugehörigen Bogen, und diese durch jene anzugeben. Zuerst die Peripherie. Man setze in (121), $v = \frac{1}{4}\pi$ oder 45°, so ist $t = 1$, und es ist

123) $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$

Diese Reihe nähert sich aber gar zu langsam, um daraus π zu finden. Eine geschwinder convergirende Reihe findet man, wenn man $v = \frac{1}{6}\pi$ oder 30° nimt, für welchen Bogen $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist. Sie ist diese

124) $$\frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3 \sqrt{3}} + \frac{1}{9 \cdot 3^4 \sqrt{3}} - \frac{1}{11 \cdot 3^5 \sqrt{3}} + \text{etc.}$$

oder

$$\pi = 2\sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \text{etc.}\right)$$

Die gröste Schwierigkeit bey dieser Rechnung ist, daß man die Wurzelgrösse $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ in sehr viel Decimalfiguren haben muß, wenn man die Näherung weit treiben will. Dieser auszuweichen zerfälle man den Bogen von $45° = \frac{1}{4}\pi$ in zwey willkührliche Bogen a und b, deren Tangenten rationale Grössen seyn. Die Bogen a, b, mögen seyn, welche sie wollen, so ist (3.)

$$\text{tang.}(a+b) = 1 = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,a.\,\text{tang.}\,b};$$

folglich $\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b = 1 - \text{tang.}\,a.\,\text{tang.}\,b$, und $\text{tang.}\,b = \frac{1-\text{tang.}\,a}{1+\text{tang.}\,a}$. Man nehme $\text{tang.}\,a = \frac{1}{2}$, so ist $\text{tang.}\,b = \frac{1}{3}$, und folglich

$$a = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \text{etc.}$$

$$b = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \text{etc.}$$

und also, beyde Reihen addirt,

$$125)\ \tfrac{1}{4}\pi = \begin{cases} \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \text{etc.} \\ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \text{etc.} \end{cases}$$

Eine Berechnung der zwölf ersten Stellen des Umfanges nach der Formel (124) findet man in Herrn Hofr. Kästners Analysis unendlicher Grössen §. 306. Ein Beyspiel der Näherung zu haben, wollen wir die Peripherie bis auf 6 Decimalstellen nach (125) berechnen.

A.	B.
$\frac{1}{2} = 0,5.$	$\frac{1}{3} = 0,33333333$
$\frac{1}{2^3} = 0,125$	$\frac{1}{3^3} = 0,03703704$
$\frac{1}{2^5} = 0,03125$	$\frac{1}{3^5} = 0,00411523$
$\frac{1}{2^7} = 0,0078125$	$\frac{1}{3^7} = 0,00045725$
$\frac{1}{2^9} = 0,001953125$	$\frac{1}{3^9} = 0,00005080$
$\frac{1}{2^{11}} = 0,00048828I$	$\frac{1}{3^{11}} = 0,00000564$
$\frac{1}{2^{13}} = 0,000122070$	$\frac{1}{3^{13}} = 0,00000063$
$\frac{1}{2^{15}} = 0,000030517$	$\frac{1}{3^{15}} = 0,00000007$
$\frac{1}{2^{17}} = 0,000007629$	
$\frac{1}{2^{19}} = 0,000001907$	
$\frac{1}{2^{21}} = 0,000000477$	

C.

C.		D.	
1)	0,5		
5)	0,00625	3)	0,04166666
9)	0,00021701	7)	0,00111607
13)	0,00000939	11)	0,00004439
17)	0,00000045	15)	0,00000203
21)	0,00000002	19)	0,00000010
+	0,50647871	—	0,04283925

E.		F.	
1)	0,33333333		
5)	0,00082304	3)	0,01234568
9)	0,00000564	7)	0,00006532
13)	0,00000004	11)	0,00000051
+	0,33416205	—	0,01241151
+	0,50647687	—	0,04283925
+	0,84063892	—	0,05524076

$$+\ 0,8406389$$
$$-\ 0,0552407$$
$$\tfrac{1}{4}\pi = 0,7853982\ -$$
$$\pi = 3,141592\ +$$

Die

Die Columne A enthält die ungeraden Potenzen der 2, als Divisores der Eins, und B auf eben die Art die ungeraden Potenzen der 3. Die Columnen C und D enthalten die Glieder der Columne A durch die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. folgweise dividirt; die erstern die positiven, welche das erste, dritte, fünfte, u. s. w. sind; die zweyte die negativen, welches die übrigen sind. Die Columnen E, F verhalten sich zu der B auf dieselbe Art. Die Glieder der Columnen D, F von den Gliedern der C, E abgezogen, geben die Grösse von $\frac{1}{4}\pi$ näherungsweise.

Man hat den Wehrt von π unglaublich weit berechnet. Herr Euler in seiner Introd. in Anal. infin. P. I. Cap. VIII. gibt den Wehrt von π bis auf 127 Decimalstellen folgendermassen an.

126) $\pi = 3,$ 141592 653589 793238 462643
383279 502884 197169 399375
105820 974944 592307 816406
286208 998628 034825 342117
067982 148086 513272 306647
093844 6 +

X.

Die Sinus aus dem zugehörigen Bogen oder Winkel zu finden, muß man in (107) den Bogen v durch den Halbmesser = 1 ausdrücken. Man setze $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, und substituire diesen Ausdruck und in demselben den gefundenen Wehrt von π in den Formeln (107, 108) für v, so kann man

wegen

wegen des bekannten Wehrtes von π aus dem Verhältnis eines Winkels zum Rechten, es mag dis durch die Anzahl der Grade, welche der Winkel hält, oder auf eine andere Art gegeben seyn, den Sinus und Cosinus des Winkels finden. Es ist nemlich

$$
\begin{aligned}
127)\ \sin.\frac{m}{n}90^\circ = &+\frac{m}{n}.\ 1,5707963268\ \ldots \\
&-\frac{m^3}{n^3}.\ 0,6459640975\ \ldots \\
&+\frac{m^5}{n^5}.\ 0,0796926262\ \ldots \\
&-\frac{m^7}{n^7}.\ 0,0046817541\ \ldots \\
&+\frac{m^9}{n^9}.\ 0,0001604412\ \ldots \\
&-\frac{m^{11}}{n^{11}}.\ 0,0000035988\ \ldots \\
&+\frac{m^{13}}{n^{13}}.\ 0,0000000569\ \ldots \\
&-\frac{m^{15}}{n^{15}}.\ 0,0000000006\ \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und

$$128)\ \cos\frac{m}{n}90^\circ = +\ 1,0000000000\ .\ .$$

$$-\frac{m^2}{n^2}.1,2337005501\ .\ .$$

$$+\frac{m^4}{n^4}.0,2536695079\ .\ .$$

$$-\frac{m^6}{n^6}.0,0208634807\ .\ .$$

$$+\frac{m^8}{n^8}.0,0009192603\ .\ .$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}.0,0000252020\ .\ .$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}.0,0000004711\ .\ .$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.0,0000000064\ .\ .$$

etc.

Diese Berechnungen sind aus des Herrn Eulers Introd. in Anal. infin. P. I. Cap. VIII. §. 134. genommen, wo die Potenzen von $\frac{m}{n}$ bis auf die 29te und 30ste, und die darin multiplicirten Zahlen bis auf die 28ste Decimalfigur gehen.

Weil es hinlänglich ist, die Sinus und Cosinus

nus der Winkel bis auf 45° zu berechnen, so ist $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, und daher sind die gegebenen Reihen sehr convergent.

XI.

Die Tangenten und Cotangenten ergeben sich zwar unmittelbar aus den Sinus und Cosinus; aber die Division durch so grosse Zahlen ist sehr beschwerlich. Aus den Formeln (110, 111) liessen sie sich bequemer auf eine ähnliche Art wie die Sinus und Cosinus darstellen. Die Reihe für die Tangenten ist nur nicht sehr convergent, wenn v nicht ein kleiner Bruch ist. Herr Euler hat an a. O. §. 197. noch bequemere Formeln für die Tangente und Cotangente eines Winkels $\frac{m}{2n}\pi$ gegeben, und daraus eb. das. §. 135. ähnliche Reihen für die Sinus und Cosinus berechnet. Die Gründe dieser Rechnungen aber sind für diese Schrift zu weitläuftig, und ich muß daher den Leser auf das angeführte Werk, das jedem Liebhaber der höhern Mathematik höchst wichtig ist, verweisen.

Itzt, da der Canon der Sinus, Cosinus und Tangenten ausgearbeitet ist, braucht man zwar die gefundenen Formeln nicht, diese Grössen zu berechnen. Die Vortheile der Rechnung, welche sie an die Hand geben, kommen zu spät. Indessen dienen sie immer noch den Zusammenhang

der Bogen und der ihnen zugehörigen trigonometrischen Grössen deutlich darzustellen, welcher bey allen Arten von Grössen der Hauptzweck der mathematischen Untersuchungen ist. Sie sind auch in der Entwickelung der Rechnungen und zum Approximiren von vielfältigem Gebrauch.

XII.

Ein Vortheil bey der Berechnung der Sinus und Cosinus ist noch dieser. Man braucht sie nur für die Winkel unter 30° zu berechnen, so kan man sie für die grössern Winkel blos durch die Addition und Subtraction finden. Es ist nemlich $\sin.(30^\circ + z) + \sin.(30^\circ - z) = 2\sin.30^\circ.\cos.z = \cos.z.$ (46), und $\cos.(30^\circ - z) - \cos.(30^\circ + z) = 2\sin.30^\circ.\sin.z = \sin.z.$ (49) Also ist $\sin.(30^\circ + z) = \cos.z - \sin.(30^\circ - z)$ und $\mathrm{cs}.(30^\circ + z) = \mathrm{cs}.(30^\circ - z) - \sin.z.$ Hieraus erhält man also die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis 60°, unter welchen die für die grössern Winkel alle vorkommen. Es ist auch schon hinlänglich sie nur für die Winkel bis 45° zu suchen.

Bey den Tangenten und Cotangenten kan man sich auf eine ähnliche Art helfen. Es ist (27) $\mathrm{tang}.2z = \frac{2\,\mathrm{tang}.z}{1 - (\mathrm{tang}.z)^2}$ oder $\cot.2z = \frac{\cot.z - \mathrm{tang}.z}{2}$, durch welche Gleichung man aus den Tangenten und Cotangenten von Winkeln unter 30° die Cotangenten von Winkeln über 30° bis 60° findet. So erhält man alle

Cotangenten, und folglich auch alle Tangenten. Oder man setze $z = 30^\circ - s$, so ist $2z = 60^\circ - 2s$ und $\cot. 2z = \tang. (30^\circ + 2s) = (\cot. (30^\circ - s) - \tang. (30^\circ - s)) : 2$, durch welche Formel man auch die Tangenten von Winkeln über 30° erhält, die aber um das doppelte grösser denn 30° sind, als die Winkel der gegebenen Tangenten kleiner waren.

XIII.

Die Logarithmen der Peripherie, des Sinus und Cosinus bequem zu finden, dienen die Formeln (114-118). Man muß aber wissen, daß

$$\log. (1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.}^{*}$$

worunter der hyperbolische zu verstehen ist, welcher durch den Bruch 0,43429448... muß multiplicirt werden, um den Logarithmen der gewöhnlichen Tafeln zu bekommen. Nun gibt die Gleichung (118) $\log. \pi = l\,4 + l\,(1 - \frac{1}{9}) + l\,(1 - \frac{1}{25}) + l\,(1 - \frac{1}{49}) + \text{etc.}$ oder

$$l\pi = l\,4 + \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2.9^2} - \frac{1}{3.9^3} - \frac{1}{4.9^4} - \text{etc.} \\ - \frac{1}{25} - \frac{1}{2.25^2} - \frac{1}{3.25^3} - \frac{1}{4.25^4} - \text{etc.} \\ - \frac{1}{49} - \frac{1}{2.49^2} - \frac{1}{3.49^3} - \frac{1}{4.49^4} - \text{etc.} \\ \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Die

* S. Kästners Anal. unendl. Gr. §. 227. 230.

Diese Reihen zu summiren lehrt Herr Euler a. a. O. §. 169. Die ganze Rechnung findet man sehr genau und weit geführt eben daselbst §. 190. Es wird daselbst gefunden

129) log. tabul. $\pi = 0,497149872694\ldots$ welcher von häufigem Gebrauch und von grosser Bequemlichkeit ist, bey genauern Rechnungen die Multiplication und Division mit der Irrationalzahl π zu vermeiden.

Die Logarithmen der Sinus und Cosinus werden auf eine ähnliche Art aus den Formeln (114. 115) hergeleitet. Die ganze Rechnung, welche wegen der dabey nöthigen Summirungen der darin vorkommenden unendlichen Reihen merkwürdig ist, findet man beym Herrn Euler a. a. O. §. 191. ff.

XIV.

Der Bogen, welcher dem Halbmesser oder der Einheit gleich ist, ist in Secunden ausgedrückt = $\frac{648000''}{\pi}$. (10), oder es ist

130) Arc. 1 $= 57°17'44'',8$

und

131) log. $\frac{648000''}{\pi} = 5,3144251$

Wenn ein Bogen in Secunden gegeben ist, so muß man die Logarithmen des Halbmessers und der Secundenzahl addiren, und davon diesen Logarithmen abziehen, die Länge des Bogens in Theilen des Halbmessers zu erhalten. Ist die

Länge

Länge des Bogens in Theilen des Halbmessers gegeben, so wird der Logarithmus des Bogens zu dem 5,314425 1 addirt, davon der Logarithmus des Halbmessers abgezogen, der Rest ist der Logarithmus der Secundenzahl des Bogens; beydes zu Folge (11. 12).

Sechstes Kapitel

Die sphärische Trigonometrie.

I.

Was die ebene Trigonometrie für die Lagen gerader Linien gegen einander ist, das ist die sphärische für die Lagen ebener Flächen gegen einander.

Die Lage zweyer Ebenen gegen einander oder ihr Winkel ist der Winkel zweyer gerader Linien, welche durch einen Punkt ihres Durchschnitts, jede in einer der beiden Ebenen, auf diesen Durchschnitt senkrecht gezogen werden.

Zwey Ebenen AEB, ADB schneiden sich in der Linie AB. (Fig. 14.) Eine dritte ECD schneide jene in EC, diese in DC. Aus dem Punkte C, der allen drey Ebenen gemein ist, beschreibe man mit einem willkührlichen aber demselben Halbmesser auf den drey Ebenen die Kreise AEB, ADB, DE, wovon in der Figur nur die Halbcirkel und der Bogen ED erscheinen. Diese Kreise sind also auf der Oberfläche einer Kugel befindlich, deren Halbmesser der angenommene ist, und for-

mire darauf Dreyecke wie AED, BED, welche man Kugeldreyecke nennt. Die Winkel, welche in einem solchen Dreyeck die Bogen mit einander machen, sind die Winkel der Ebenen, worin sie liegen. So ist der Winkel EAD der Bogen EA, AD der Winkel der Ebenen AEB, ADB. Nemlich die Tangenten der Bogen EA, DA durch den Punkt A stehen auf dem Halbmesser CA senkrecht; der Winkel dieser Tangenten ist der Winkel der beiden Ebenen AEB, ADB. Der Winkel der Bogen ist der Winkel ihrer Elemente bey dem Punkte A, also der Tangenten oder der beiden Ebenen. Die Bogen selbst sind das Maaß der Winkel zwischen den Durchschnittslinien, worin eines jeden Ebene die Ebenen der beiden andern schneidet. So ist AE das Maaß des Winkels ECA, oder des Winkels zwischen EC, CA, worin die Ebene AEB die Ebenen ECD, ADB schneidet. Wir werden demnach die Seiten der sphärischen Dreyecke, die eigentlich Winkel vorstellen, als mit dem Halbmesser = 1 beschrieben annehmen, und ihre Länge selbst allemahl durch diese Einheit ausdrücken. Für einen andern Halbmesser müssen sie nur durch die Grösse desselben multiplicirt werden.

II.

Es ist hiebey gleichgültig, ob man das Dreyeck AED oder BED betrachten will. In diesem leztern ist EBD = EAD in dem andern Dreyecke, und die Winkel BED, BDE sind die Complemente der Winkel AED, ADE zu zwey Rechten,

ten, wie es die Winkel BCE, BCD den Winkeln ECA, ACD, oder ihre Maassen BE, BD den Bogen EA, DA zur halben Peripherie sind. Man könnte auch die Lage der Ebenen durch das Dreyeck angeben, dessen eine Seite das Complement des Bogens AD zur ganzen Peripherie und die beiden übrigen die Bogen AE, DE sind. Am einfachsten wählt man das, worin die wenigsten stumpfen Winkel und Seiten vorkommen, wie z. E. in dem Falle der Figur das Dreyeck AED. Uebrigens entstehen auf der andern Seite der Ebene AEB eben solche zwey Dreyecke als AED, BED sind, und unterhalb der Ebene ADB zwey Paar ihnen gleiche.

III.

Hieraus entsteht bey Auflösung sphärischer Dreyecke bisweilen eine Zweydeutigkeit, ob der gefundene Bogen oder Winkel spitz, stumpf, oder mehr als stumpf sey. Die Zeichen der trigonometrischen Functionen müssen sie entweder heben, oder die Umstände der Untersuchung, womit die Auflösung des Dreyecks zusammenhängt, müssen es entscheiden, wie das gefundene beschaffen sey; oder wenn dis nicht ist, so ist es der Natur der Sache gemäß, daß es gleichgültig bleibt, ob man den Bogen oder Winkel spitz oder stumpf, unter oder über zwey Rechten nehmen will. Folgendes kan auch dienen, die Sache auseinander zu setzen.

IV.

Zwey Ebenen AEB, ADB machen einen rechten Winkel miteinander, (Fig. 15.), eine dritte schneide ADB in CD, so kan sie mit ihr entweder einen rechten Winkel machen, wie FCD, oder einen spitzigen nach A zu, wie ECD, oder einen stumpfen, wie GCD. In dem ersten Falle ist der Ebene Durchschnitt FC mit AFB senkrecht auf ABD oder auf AB, und es ist AF = FB = einem Quadranten. Folglich ist in dem zweyten Falle AE kleiner als ein Quadrant, und in dem dritten GA grösser als ein solcher.

Man nenne in einem sphärischen rechtwinklichten Dreyeck die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, die Hypotenuse, die beiden andern die Katheten, so sind in einem jedem sphärischen rechtwinklichten Dreyeck die Katheten kleiner, so groß, oder grösser als ein Quadrant, nach dem der gegenüberstehende Winkel kleiner, so groß oder grösser als ein Rechter ist; und umgekehrt.

V.

Wenn die Kathete AF ein Quadrant ist, so ist es auch die Hypotenuse FD, weil FC auf AB und also wegen des rechten Winkels der Ebenen auf ABD oder auf CD senkrecht steht. Der Punkt F heist der Pol des Cirkels ADB, von dem die Kathete AD ein Theil ist. Die Ebene FCD steht auf ADB senkrecht, weil sie durch die senkrechte FC geht. Und umgekehrt, wenn FA, FD, Quadranten sind, so stehen sie auf AD senk-

senkrecht, weil alsdenn FC, wodurch die Ebenen dieser Bogen gehen, senkrecht auf ACD steht; und F ist der Pol des Bogens AD. Dieser Bogen AD ist das Maaß des Winkels AFD oder des der beiden Ebenen ACF, DCF.

VI.

Es sey nun für die drey verschiedenen Lagen der Hypotenuse (IV.) der Bogen AD ein Quadrant, so ist sowol DE als DG auch ein Quadrant (V.). Ist aber DA kleiner als ein Quadrat, so fällt der Kreis, wovon D der Pol ist, zwischen die Ebenen BF, FD über FA von D an hinaus. Es ist also DE kleiner als ein Quadrant, und DG grösser; oder in einem rechtwinklichten Dreyeck ist die Hypotenuse kleiner als ein Quadrant, wenn beyde Katheten wie AE, AD, oder BE, BD zugleich kleiner oder grösser als ein solcher sind. Sie ist ein Quadrant, wenn eine der Katheten ein solcher ist. Sie ist grösser, wenn eine Kathete kleiner die andere grösser als ein Quadrant ist.

VII.

Man kan in einem jeden rechtwinklichten sphärischen Dreyeck die drey Seiten immer kleiner als Quadranten und die beyden Winkel ausser dem rechten für spitz annehmen. Denn die überstumpfen Dreyecke bey Seite gesetzt, für welche man immer ihre Complemente zur Halbkugel nehmen kan, so seyn erstlich beide Katheten BE, BD grösser als ein Quadrant. Man nehme statt ihrer

ihre Complemente EA, DA, so hat man ein Dreyeck AED, worin die Hypotenuse so wie die Katheten kleiner als ein Quadrant, und die beiden Winkel spitz sind. Ist eine Kathete AG grösser, die andere AD kleiner als ein Quadrant, so nehme man die Complemente Ad, Dd der Kathete und der Hypotenuse, wodurch man ein Dreyeck ADd erhält, dessen Seiten kleiner als Quadranten und die Winkel ausser dem rechten spitz sind.

VIII.

Es sey (F. 16.) ABC ein solches sphärisches bey A rechtwinklichtes Dreyeck, das von den Ebenen AOC, AOB, BOC formirt wird. Von dem Winkelpunkte C ziehe man in der Ebene BOC auf den Durchschnitt OB mit AOB die senkrechte CP, und durch den Punkt P die senkrechte PQ auf eben diese OB in der Ebene AOB, welche dem Durchschnitt AO der Ebenen AOB, AOC in Q begegne; so ist CPQ der Winkel der Ebenen COB, AOB, oder der Winkel B des Dreyecks ABC. Ferner steht die Ebene CPQ auf AOB senkrecht, weil OB auf CP und QP senkrecht steht; daher ist ihr Durchschnitt CQ mit AOC, die auch auf AOB senkrecht ist, senkrecht auf AOB, und der Winkel PQC = OQC = R. Die Vergleichung der Seiten der vier rechtwinklichten Dreyecke OPC, OPQ, CQP, CQO, wo die mitlern Buchstaben zu dem rechten Winkel gehören, wird die Vergleichung zwischen den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreyecks ABC geben.

1. Die

1. Die beiden Dreyecke OQC, CQP vergli-chen, geben

$$OC : CQ = 1 : \sin. CA$$

und $CQ : CP = \sin. B : 1$

also $OC : CP = \sin. B : \sin. CA.$

oder, weil $OC : CP = 1 : \sin. CB;$

$$1 : \sin. CB = \sin. B : \sin. CA.$$

2. Eben diese Dreyecke geben

$$OQ : CQ = 1 : \text{tang}. CA$$

$$CQ : PQ = \text{tang}. B : 1$$

also $OQ : PQ = \text{tang}. B : \text{tang}. CA$

oder $1 : \sin. BA = \text{tang}. B : \text{tang}. CA.$

3. Die beiden Dreyecke CQP, OPQ verglichen, geben

$$CP : QP = 1 : \cos. B$$

$$QP : OP = \text{tang}. AB : 1$$

also $CP : OP = \text{tang}. AB : \cos. B$

oder $\text{tang}. CB : 1 = \text{tang}. AB : \cos. B$

das ist $1 : \text{tg}. CB = \cos. B : \text{tang}. AB$

4. Die Dreyecke CQO, OPC verglichen, geben

$$OQ : OC = \cos. AC : 1$$

$$OC : OP = 1 : \cos. BC$$

also $OQ : OP = \cos. AC : \cos. BC$

oder $1 : \cos. AB = \cos. AC : \cos. BC$

5. Die Vergleichungen, welche man sonst noch zwischen den Seiten dieser Dreyecke machen kan, kommen mit den gefundenen überein, und sind nur darin verschieden, daß die Verhältnisse in einer andern Ordnung zusammengesezt werden. Auch enthalten die vier gefundenen Analogien alle

Fälle

Fälle, wie ein Winkel des Dreyecks mit je zwey der drey Seiten, oder die drey Seiten unter sich, den rechten Winkel jedesmal mitgenommen, zu vergleichen können gefodert werden. Es ist noch übrig die zwey Winkel unter sich und mit einer Kathete oder der Hypotenuse zu vergleichen. Man muß also zwey Analogien, in deren jeder einer dieser Winkel vorkömt, zusammensetzen. In den gefundenen Analogien kan man für B den Winkel C setzen, wenn man zugleich statt AB der an B liegenden Kathete, AC, und statt AC, der gegenüberstehenden, AB schreibt, wodurch man die an dem Winkel C liegende oder ihm gegenüberstehende Seite erhält; kurz wenn man die Buchstaben B, C, verwechselt. Daher wird die Analogie nr. 1. diese

1 : sin. BC = sin. C : sin. BA

es war aber 1 : sin. BC = sin. B : sin. CA

also ist sin. C : sin. AB = sin. B : sin. AC. Die Analogie nr. 2. läßt sich aber auch so ausdrücken: cos. B : sin. AB = sin. B : tang. CA. Diese und die leztere zusammengesezt geben cos. B : sin. C = sin. AC : tang. AC, oder wenn man das leztere Verhältnis durch sin. AC dividirt, und durch cos. AC multiplicirt, und es zuerst schreibt,

1 : cos. AC = sin. C : cos. B

6. Eben so wird, B und C verwechselt, die Analogie nr. 2. diese 1 : sin. CA = tang. C : tang. BA, diese mit der nr. 3, 1 : tang. CB = cos. B : tang. AB zusammengesezt, erhält man

tang.

tang. CB : sin. CA = tang. C : cos. B
Es war aber nr. 1. 1 : sn. CB = sin. B : sn. CA

also tang. CB : sin. CB = tg. C . sn. B : cs. B
oder, 1 : cos. CB = tang. C : cot. B

IX.

Man bezeichne die Winkel des Dreyecks durch die zu ihnen gesezten Buchstaben A, B, C, die gegen über stehenden Seiten BC, AC, AB durch a, b, c, so erhält man aus dem vorhergehenden Art. folgende Formeln:

132) 1 : sin. a = sin. B : sin. b
133) 1 : sin. c = tang. B : tang. b
134) 1 : tang. a = cos. B : tang. c
135) 1 : cos. c = cos. b : cos. a
136) 1 : cos. b = sin. C : cos. B
137) 1 : cos. a = tang. C : cot. B

Diese sechs Analogien enthalten die Auflösungen aller Fälle, wie man in einem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck aus zwey Stücken ausser dem rechten Winkel das dritte suchen kan. Die gegebenen Stücke mit dem gesuchten sind entweder je zwey Seiten mit dem nicht eingeschlossenen Winkel, so dienen die Formeln (132. 133 oder je zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, so dient (134) für beide Fälle, wenn man C und b für B und c schreibt; oder es sind alle drey Seiten, so dient (135); oder es sind die beiden spitzen Winkel mit je einer der gegenüberstehenden Seiten, so enthält (136) beide Fälle; oder end-
lich

lich, wenn die Seite von den Winkeln eingeschlossen ist, wird (137) gebraucht. Die Glieder der Analogien müssen nur noch so geordnet werden, daß das gesuchte jedesmahl zulezt komme.

Uebrigens gelten die Analogien, welche für ein Dreyeck gefunden sind, dessen Seiten alle kleiner als Quadranten waren, auch von seinen Complementen zur halben oder ganzen Halbkugel. Man muß nur die Zeichen der trigonometrischen Functionen nach (6–8) so ändern, wie es die nach (IV -- VI) zusammengehörige Gattungen der Seiten und Winkel erfodern.

Man nehme erstlich statt des Dreyecks (Fig. 15.) ADE das Dreyeck BDE, dessen Katheten die Complementen der Katheten jenes sind. Es sey DE = a, AE = b, AD = c, und die Winkel bey D, E seyn denen bey B, C (Fig. 16.) gleich. So verwandeln sich die Formeln für das ADE in die für das Dreyeck BDE folgendermassen

$$1 : \sin. a = \sin. B : \sin. b$$
$$1 : \sin. c = -\text{tang}. B : -\text{tang}. b$$
$$1 : \text{tang}. a = -\cos. B : -\text{tang}. c$$
$$1 : -\text{cs}. c = -\cos. b : \cos. a$$
$$1 : -\text{cs}. b = \sin. C : -\cos. B$$
$$1 : \cos. a = -\text{tang}. C : -\cot. B$$

Oder wenn man statt des Dreyecks ADd das ADG nimt, worin die Hypotenuse und die Kathete AG die Complemente von Dd, Ad sind, Dd = a, Ad = b, AD = c, und die Winkel D,

D, d den Winkeln B, C (Fig. 16.) gleich gesezt, so erhält man aus den Formeln für das Dreyeck ADd die für ADG folgendermassen

1 : sin. a = sin. B : sin. b
1 : sin. c = — tang. B : — tang. b
1 : — tang. a = — cos. B : tang. c
1 : cos. c = — cos. b : — cos. a
1 : — cos. b = sin. C : — cos. B
1 : — cos. a = tang. C : — cot. B

Man nehme statt des Dreyecks ADE sein Complement zur Halbkugel, das Dreyeck, dessen eine Kathete EBdA, die andere DA, die Hypotenuse DE ist. Die Formeln für dieses sind

1 : sin. a = — sin. B : — sin. b
1 : sin. c = — tang. B : — tang. b
1 : tang a = cos. B : tang. c
1 : cos. c = cos. b : cos. a
1 : cos. b = sin. C : cos. B
1 : cos. a = — tang. C : — cot. B

Alle diese Analogien sind entweder die für das kleinste sphärische Dreyeck gefundene selbst, oder entstehen daraus, indem je zwey Glieder derselben, die Einheit ausgenommen, ihr Zeichen ändern. Dis gilt auch von den Analogien für die Complemente der stumpfen Dreyecke BDE, ADG zur Halbkugel. Denn die Analogien für diese stumpfen Dreyecke sind von denen für das spitzige nur in den Zeichen verschieden.

Es sind demnach die Formeln (132—137) für alle Arten rechtwinklichter Dreyecke allgemein. Zuerst bleibt die Grösse der trigonometrischen Functionen dieselbe, wenn die Lage der Ebenen einer-

ley bleibt, man mag sie durch spitze, stumpfe oder überstumpfe Winkel bestimmen. Da ferner je zwey zugleich immer ihr Zeichen ändern, so bleibt das Product aus den beiden mitlern entweder positiv, oder wenn es negativ wird, so wird das aus den äussern auch negativ, daß also die Formeln für diese Fälle in jenen enthalten sind, und nur durch die verschiedenen Zeichen die verschiedenen Gattungen der Bogen und Winkel andeuten. Die aus diesen Formeln herzuleitenden gelten also auch allgemein, die Winkel und Seiten des Dreyecks mögen beschaffen seyn wie sie wollen. Man muß nur jeder trigonometrischen Function ihr gehöriges Zeichen geben, so bekömt die daraus zusammengesezte Function ihr richtiges Zeichen, und es bleibt wegen des Bogens oder Winkels keine weitere Zweydeutigkeit, als die dieses Zeichen noch läßt.

X.

Wenn von den Ebenen ACE, ABE, COB (Fig. 17.) keine auf die andre senkrecht steht, so setze man durch OC, worin die Ebene COB die ACE schneidet, die senkrechte COD auf ABE. Aus dem Punkte O, der allen vier Ebenen gemein ist, beschreibe man, wie vorhin, mit einem willkührlichen Halbmesser auf jeder Ebene Kreise, welche die beiden spitz- oder stumpfwinklichte Dreyecke ACB, ECB, und die rechtwinklichten ADC, CDB, EDC bilden. Der senkrechte Bogen CD fällt zwischen die beiden Ebenen, deren Winkel nach CD zu gleichnahmig sind. Denn

ein und dasselbe Perpendikel kann nicht zugleich einem spitzen und stumpfen Winkel gegenüberstehen (IV.). Wir brauchen hier nicht den Fall zu betrachten, da die dem senkrechten Bogen CD gegenüberstehende Winkel B, A, beide stumpf sind. Denn die Formeln, welche für die rechtwinklichte Dreyecke mit spitzen Winkeln gelten, sind bey gehöriger Veränderung der Zeichen auch für die mit stumpfen Winkeln richtig (IX.). Oder, welches dasselbe ist, man kan (Fig. 15.) statt eines schiefen Dreyecks mit zwey stumpfen Winkeln DEBdD, worin BD der senkrechte Bogen ist, das Complement zur Halbkugel DEAdD betrachten, worin DA senkrecht auf Ed steht.

Es sey (Fig. 18. 19.) ABC ein sphärisches Dreyeck, worin kein Winkel recht ist, CD der senkrechte Bogen von dem Winkelpunkte C auf die gegenüberliegende Seite AB gefällt, welches innerhalb des Dreyecks fällt, wenn A, B beide spitz (oder auch stumpf, welches hier nicht betrachtet wird) sind, und ausserhalb des Dreyecks, wenn einer wie A stumpf, der andere B spitz ist. Die Bogen BC, AC, wie auch CD seyn in beiden Figuren dieselben, wie auch die Winkel B, so ist (Fig. 18.) der Winkel C die Summe der Winkel ACD, BCD, und die Seite AB die Summe der Segmente AD. BD; (Fig. 19.) aber jedes der Unterschied dieser Grössen.

In den beiden Dreyecken ADC, BDC ist, unter A und B die innern Winkel verstanden,

$$\left.\begin{array}{l} 1 : \sin. A = \sin. AC : \sin. DC \\ \sin. B : 1 = \sin. DC : \sin. BC \end{array}\right\} (132)$$

138) $\sin. B : \sin A. = \sin. AC : \sin. BC$

Ferner $\left.\begin{array}{l} 1 : \sin. AD = \text{tang. } A : \text{tang. } CD \\ \sin BD : 1 = \text{tg. } CD : \text{tang. } B \end{array}\right\} (133)$

139) $\sin BD : \sin AD = \text{tang.} A : \text{tang.} B$

Diese Analogie wird für den Fall (Fig. 19.) weil BAC stumpf ist, und AD eine entgegengesetzte Lage hat, diese:

$$\sin. BD : -\sin. AD = -\text{tg.} A : \text{tg.} B.$$

Weiter, $\left.\begin{array}{l} 1 : \text{tg. } CA = \text{cos.} ACD : \text{tg.} CD \\ \text{tang.} CB : 1 = \text{tg.} CD : \text{cos.} BCD \end{array}\right\} (134)$

140) $\text{tg.} CB : \text{tg.} CA = \text{cos.} ACD : \text{cos.} BCD$

Noch ist $\left.\begin{array}{l} 1 : \text{cos.} AD = \text{cos.} CD : \text{cos.} CA \\ \text{cos.} BD : 1 = \text{cos.} BC : \text{cos.} CD \end{array}\right\} (135)$

141) $\text{cos.} BD : \text{cos.} AD = \text{cos.} BC : \text{cos.} CA$

Endlich $\left.\begin{array}{l} 1 : \sin ACD = \text{cs.} CD : \text{cos.} A \\ \sin. BCD : 1 = \text{cos.} B : \text{cs.} CD \end{array}\right\} (136)$

142) $\sin. BCD : \sin. ACD = \text{cos.} B : \text{cos.} A$

oder $\sin. BCD : -\sin. ACD = \text{cos.} B : -\text{cos.} A$ für den Fall (Fig. 19).

XI.

1. Die erste dieser Analogien gibt eine Gleichung zwischen zwey Seiten und zwey gegenüberstehenden Winkeln; $\sin. A. \sin. AC = \sin. B. \sin. BC$.

2. Eine Gleichung zwischen zwey Seiten BC, BA und zwey Winkeln A, B, deren einer von den

Seiten

Seiten eingeschlossen ist, zu finden, verfahre man auf eine ähnliche Art wie in (Kap. 2. III.).

Es ist nemlich tang BD = tang. BC. cos. B (134), und sin. AD = sin. (AB — BD) = sin. AB. cos. BD — cos. AB. sin. BD (26), oder $\frac{\text{sin. AD}}{\text{sin. BD}}$ $= \frac{\text{sin. AB}}{\text{tang BD}} - \text{cos. AB}$; für den Fall der Fig. 18. Man setze für tang. BD seinen Wehrt, wie auch für $\frac{\text{sin. AD}}{\text{sin BD}}$ aus (139), so erhält man $\frac{\text{tang. B}}{\text{tang. A}} = \frac{\text{sin. AB}}{\text{tang BC. cos. B}} - \text{cos. AB}$, oder wenn man die Gleichung durch tang. BC. cos. B. tang. A multiplicirt, sin. B. tang. BC = sin. AB. tang. A — cos. AB. tang. BC. cos. B. tang. A. Hieraus erhält man

$$\text{tang. A} = \frac{\text{sin. B. tang. BC}}{\text{sin. AB} - \text{cos. AB. tang. BC. cos. B}}$$

$$= \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. AB. cot. BC} - \text{cos. AB. cos. B}}$$

$$\text{und tang. BC} = \frac{\text{sin. AB. tang. A}}{\text{sin. B} + \text{cos. AB. cos. B. tang. A}}$$

$$= \frac{\text{sin. AB}}{\text{sin. B. cot. A} + \text{cos. AB. cos. B}}$$

Wenn man aus dieser Gleichung den Winkel B aus den drey übrigen Grössen suchen wollte, so müste man zuerst cos. B durch sin. B ausdrücken.

Dadurch kommen Irrationalgrössen in die Gleichung, welche herauszuschaffen man sie quadriren müsste, und sin. B, als die Wurzel einer quadratischen Gleichung, bekömt zwey Wehrte. Die Ursache hievon ist, daß sich aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber steht, zwey Dreyecke verzeichnen lassen. So können in den Dreyecken ABC (Fig. 18. 19.) die Seiten AC, BC und der Winkel B einerley seyn, und der eingeschlossene Winkel C ist entweder die Summe, oder der Unterschied der Winkel BCD, ACD.

Wenn AB durch die übrigen Grössen gefunden werden soll, so entsteht eine ähnliche Zweydeutigkeit aus denselben Gründen. Die Lage von CA gegen AB ist dieselbe, der spitzige Winkel mag auf der einen oder der andern Seite fallen.

Die Rechnung für den Fall (Fig. 19.) besonders entwickelt, gibt dieselbe Gleichung. Es ist für diesen Fall $\sin. AD = \sin. (BD - AB) = \sin. BD . \cos. AB - \cos. BD . \sin. AB$ oder $\frac{\sin. AD}{\sin. BD}$

$$= \cos. AB - \frac{\sin. AB}{\text{tang}. BD};\ \text{das ist} - \frac{\text{tang}. B}{-\text{tang}. CAB}$$

$$= \cos. AB - \frac{\sin. AB}{\text{tang}. BC . \cos. B},$$ welches die vorige Gleichung ist, nur daß beide Theile ihre Zeichen geändert haben.

XII.

Eine Gleichung zwischen den drey Seiten und einem Winkel erhält man auf eine ähnliche Art. Es ist tang. AD = tang. AC. cos. A (134); und cos. BD = cos. (AB—AD) = cos. AB. cos. AD + sin. AB. sin. AD (28), oder $\frac{\text{cos. BD}}{\text{cos. AD}}$ = cos. AB + sin. AB. tang. AD, das ist, wenn man für tang. AD seinen Wehrt, wie auch für $\frac{\text{cos. BD}}{\text{cos. AD}}$ aus (141) sezt; $\frac{\text{cos. BC}}{\text{cos. CA}}$ = cos. AB + sin. AB. tang. AC. cos. A, oder cos. BC = cos. AB. cos. AC + sin. AB. sin. AC. cs. A. Hieraus erhält man auch

$$\text{cos. A} = \frac{\text{cos. BC} - \text{cos. AB. cos. AC}}{\text{sin. AB. sin. AC}}$$

Die Seiten AB oder AC, erhalten in dieser Gleichung zweyerley Wehrte, wenn man eine von ihnen für die unbekannte Grösse nimt. Die Ursache ist wiederum, weil aus zwey Seiten, die den gegebenen Winkel nicht einschliessen, zwey Dreyecke können verzeichnet werden. Auch ist die Gleichung für den Fall, daß A stumpf ist, nicht anders als für den, wenn es spitz ist. Das zweyte Glied des Theils rechter Hand wird negativ, indessen daß cos. A zugleich negativ wird, wodurch dieses Glied sein Zeichen nicht ändert.

XIII.

Eine Gleichung zwischen den drey Winkeln und

und einer Seite wird durch die Theile des Winkels C gefunden. Es ist cot. BCD = cos. BC. tang. B, (137) und sin. ACD = sin. (C—BCD) = sin. C. cos. BCD — sin. BCD. cos. C, oder

$$\frac{\sin. ACD}{\sin. BCD} = \sin. C. \cot. BCD - \cos. C.$$

Man setze für cot. BCD seinen Wehrt, wie auch für $\frac{\sin. ACD}{\sin. BCD}$ aus (142), so ist $\frac{\cos. A}{\cos. B} = \sin. C.$

cos. BC. tang. B. — cos. C, oder

cos. A = cos. BC. sin. B. sin. C — cos. B. cos. C.

woraus auch folget

$$\cos. BC = \frac{\cos. A + \cos. B. \cos. C}{\sin. B. \sin. C.}$$

Der sin. C, als die unbekannte Grösse betrachtet, hat zwey Wehrte, aus den vorher angeführten Ursachen. Wenn BCD > C, so wird der Theil der Gleichung rechter Hand negativ, und cos. A auch, wodurch die Gleichung ungeändert bleibt.

XIV.

Man benenne die Winkel des Dreyecks ABC mit den beygeschriebenen Buchstaben A, B, C; die gegenüberstehenden Seiten mit a, b, c, so hat man für jedes sphärische Dreyeck folgende Gleichungen:

143) $\sin. A = \frac{\sin. B. \sin. a}{\sin. b}$

144) $\sin. a = \frac{\sin. A. \sin. b}{\sin. B}$

145) $\cos. A = \dfrac{\cos. a - \cos. b.\ \cos. c}{\sin. b.\ \sin. c}$

146) $\cos. a = \cos. b.\cos. c + \sin. b.\sin. c.\ \cos. A$

147) $\cos. A = \cos. a.\sin. B.\sin. C - \cos. B.\cos. C$

148) $\cos. a = \dfrac{\cos. A + \cos. B.\ \cos. C}{\sin. B.\ \sin. C}$

149) $\tang. A = \dfrac{\sin. B}{\sin. c.\ \cot. a. - \cos. c.\ \cos. B}$

oder $\cot. A = \dfrac{\sin. c.\ \cot. a}{\sin. B} - \cos. c.\ \cot. B$

150) $\tang. a = \dfrac{\sin. c}{\sin. B.\ \cot. A + \cos. c.\ \cos. B}$

oder $\cot. a = \dfrac{\sin. B.\ \cot. A}{\sin. c} + \cos. B.\ \cot. c.$

Diese Formeln sind zum Gebrauch der Rechnung wichtig. Sie enthalten erstlich alle Fälle für rechtwinklichte Dreyecke, für welche der Sinus des rechten Winkels die Einheit, der Cosinus = o, und die Tangente ohne Ende groß wird, daß jeder Theil der Gleichung, worin sie nicht vorkömt, verschwindet. Ferner, wenn eine Seite ein Quadrant ist, welches in astronomischen Rechnungen häufig vorkömt, so wird der Sinus die Einheit, u. s. w. wodurch die Formeln einfacher und auf zwey Theile gebracht werden. Die Formeln sind auch zur Berechnung der Dreyecke in Zahlen bequem, wobey man jeden Theil der Formeln durch die Logarithmen leicht findet, und sie hernach zusammennimt. Nur in den Fällen, da das ge-

suchte durch eine quadratische Gleichung gegeben ist, sind sie unbequem, für welche also bequemere Auflösungen zu suchen sind.

XV.

Wenn man die beiden Gleichungen (146. 147) mit einander vergleicht, so wird man finden, daß eine aus der andern entsteht, wenn man für die Seiten und Winkel die Complemente der ihnen gegenüberstehenden Winkel und Seiten zur halben Peripherie schreibt, und die Zeichen der Cosinus der Complemente ändert. So wird aus der Gleichung

$$\cos.a = \cos.b.\ \cos.c + \sin.b.\ \sin.c.\ \cos.A$$

diese $-\cos.A = \cos.B.\ \cos.C - \sin.B.\ \sin.C.\ \cos.a$

oder $\cos.A = \cos.a.\ \sin.B.\ \sin.C - \cos.B.\ \cos.C$

Eben so verhalten sich die Gleichungen (149. 150) gegen einander. Die Gleichung

$$\cot.A = \frac{\sin.c.\ \cot.a}{\sin.B} - \cos.c.\ \cot.B$$

wird durch die gedachte Substitution, die Cotangenten der Complemente entgegengesezt genommen,

$$-\cot.a = -\frac{\sin.C.\ \cot.A}{\sin.b} - \cos.C.\ \cot.b$$

oder $\cot.a = \dfrac{\sin.C.\ \cot.A}{\sin.b} + \cos.C.\ \cot.b$

das ist, wenn man B und C, b und c verwechselt,

$$\cot.a = \frac{\sin.B.\ \cot.A}{\sin.c.} + \cos.B.\ \cot.c$$

Es ist nemlich gleichgültig, ob man einen Winkel

und

und die gegenüberliegende Seite durch B und b oder durch C und c bezeichnet.

In der Gleichung (143) kan man ebenfalls diese Substitution vornehmen, so erhält man ohne weitere Aenderung sogleich die (144).

Es reduciren sich demnach alle Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreyecks auf folgende drey.

1) $\sin.a.\ \sin.B = \sin.A.\ \sin.b$

2) $\cos.a = \cos.b.\ \cos.c. \pm \sin.b.\ \sin.c.\ \cos.A$

3) $\cos.c.\ \cos.B = \sin.c.\ \cot.a - \sin.B.\ \cot.A$

in welchen man für die Winkel und Seiten der gegenüberstehenden Seiten und Winkel Complemente zu 180°, mit gehöriger Aenderung der Zeichen, setzen kan.

XVI.

Der Grund von der Zuläßigkeit dieser Substitution erhellt auf folgende Art. Es sey (F.20) ABC ein sphärisches Dreyeck, dessen Seiten von jedem Winkelpunkt an verlängert werden, bis sie Quadranten gleich sind, als von A nach H und F, von B nach I und G, von C nach D und E. Durch die Punkte F und H, I und G, E und D ziehe man auf der Oberfläche der Kugel die Bogen bc, ca, ab, welche sich in c, a, b schneiden, und ein neues sphärisches Dreyeck bilden. Die Punkte A, B, C sind die Pole dieser Bogen bc, ca, ab, (V. d. K.) und daher ist die Entfernung des Punktes A von c, wie die des Punktes B von eben dem Punkte, jede ein Quadrant, und c ist der Pol des Bogens AB oder FG. Eben so ist b der Pol von CA oder HE, und a von BC oder

DI

DI, und die Bogen cF, cG; aI, aD; bH, bE sind Quadranten, wie es auch CD, CE; AH, AF; BI, BG sind. Es ist aber DI das Maaß des Winkels a, und DC + BI = 180°, oder DC + CI + BC = DI + BC = 180°; folglich ist das Maaß des Winkels a das Complement des Bogens BC. Eben so sind die Maassen der Winkel b, c die Complemente der Bogen AC, AB. Gleicherweise ist bH + Fc oder bH + Hc + FH = bc + FH = 180°, folglich ist der Bogen bc das Complement des Maasses FH von dem Winkel A; und so sind auch ac, ab die Complemente der Maassen von den Winkeln B, C. Also sind die Gleichungen für die Dreyecke ABC und abc nicht weiter unterschieden, als daß die Winkel und Seiten des einen die Complemente der Seiten und Bogen des andern mit gehörig veränderten Zeichen ihrer Functionen sind. Da aber die Gleichungen für ein Dreyeck für alle gelten, so kan man die für das Dreyeck abc gefundene auch für das ABC brauchen, das ist, man kan in einer Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln desselben statt dieser ihre Complemente mit den Buchstaben der gegenüberstehenden Winkel und Seiten sezen, wenn nur die Zeichen gehörig geändert werden.

XVII.

Aus den Analogien (138—142) fliessen noch einige, welche zu brauchen sind; nemlich aus (138) erhält man, wenn sin.A > sin.B gesezt wird

sin.

$\sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B = \sin. BC + \sin. AC : \sin. BC - \sin. AC.$

oder aus (54)

151) $tg. \frac{1}{2}(A + B) : tg. \frac{1}{2}(A - B) = tg \frac{1}{2}(BC + AC) : tang. \frac{1}{2}(BC - AC)$

Aus der Analogie (139) folgt

$\sin. BD + \sin. AD : \sin. BD - \sin. AD = tang. A + tang. B : tang. A - tang. B,$

oder aus (54. 60.) $tg. \frac{1}{2}(BD + AD) : tg. \frac{1}{2}(BD - AD) = \sin. (A + B) : \sin. (A - B)$;

oder, um diese Analogie mit der ersten verbinden zu können, aus (29)

152) $\sin. \frac{1}{2}(A + B). cs. \frac{1}{2}(A + B) : \sin. \frac{1}{2}(A - B). cos. \frac{1}{2}(A - B) = tang. \frac{1}{2}(BD + AD) : tang. \frac{1}{2}(BD - AD)$

Die Analogie (140) gibt

$tg. CB + tg. CA : tg. CB - tg. CA = cs. ACD + cs. BCD : cs. ACD - cs. BCD$

oder aus (60. und 55.)

153) $\sin. (BC + AC) : \sin. (BC - AC) = \sin. \frac{1}{2}(BC + AC). cos. \frac{1}{2}(BC + AC) : \sin. \frac{1}{2}(BC - AC). cs. \frac{1}{2}(BC - AC) = 1 : tg. \frac{1}{2}(BCD + ACD). tang. \frac{1}{2}(BCD - ACD).$

Die Analogie (141) gibt

$cs. AD - cs. BD : cs. AD + cs. BD = cs. CA - cs. BC : cs. AC + cs. BC$, oder die Gleichung

154) $tg. \frac{1}{2}(BD + AD). tg. \frac{1}{2}(BD - AD) = tg. \frac{1}{2}(BC + AC). tg. \frac{1}{2}(BC - AC)$

Endlich aus (142) erhält man

$\sin. BCD + \sin. ACD : \sin. BCD - \sin. ACD = cos. B + cos. A : cos. B - cos. A$, oder

155)

155) $\text{tg.}\frac{1}{2}(BCD+ACD) : \text{tg.}\frac{1}{2}(BCD-ACD) = 1 : \text{tg.}\frac{1}{2}(A+B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(A-B)$.

XVIII.

Die Gleichungen, welche aus den drey Analogien (151, 152, 154) entstehen,

1. $\text{tg.}\frac{1}{2}(A+B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \text{tg.}\frac{1}{2}(A-B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BC+AC)$

2. $\text{sn.}\frac{1}{2}(A+B) . \text{cs.}\frac{1}{2}(A+B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BD-AD) = \text{sn.}\frac{1}{2}(A-B) . \text{cs.}\frac{1}{2}(A-B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BD+AD)$

3. $\text{tang.}\frac{1}{2}(BC+AC) . \text{tang.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \text{tang.}\frac{1}{2}(BD+AD) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BD-AD)$

multiplicire man in einander, nemlich die Theile rechter Hand in einander, und die Theile linker Hand auch in einander, mit Weglassung der beiden Producten gemeinschaftlichen Factoren, und schreibe das Quadrat des Sinus statt des Products aus der Tangente in den Sinus und Cosinus derselben Winkel; so erhält man

$\text{sn.}\frac{1}{2}(A+B)^2 . \text{tg.}\frac{1}{2}(BC-AC)^2 = \text{sn.}\frac{1}{2}(A-B)^2 . \text{tang.}\frac{1}{2}(BD+AD)^2$.

oder $\text{sn.}\frac{1}{2}(A+B) . \text{tg.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \text{sn.}\frac{1}{2}(A-B) . \text{tang.}\frac{1}{2}AB$.

Man dividire das Product der zweyten und dritten Gleichung durch die erste, und schreibe das Quadrat des Cosinus statt des Products aus dem Sinus und Cosinus durch die Tangente derselben Winkel dividirt, so erhält man

$\text{cs.}\frac{1}{2}(A+B)^2 . \text{tg.}\frac{1}{2}(BC+AC)^2 = \text{cs.}\frac{1}{2}(A-B)^2 . \text{tang.}\frac{1}{2}(BD+AD)^2$.

oder

oder $cf.\frac{1}{2}(A+B).tg.\frac{1}{2}(BC+AC)=cf.\frac{1}{2}(A-B).$
$tang.\frac{1}{2}AB.$

Diese Rechnung ist für den Fall gemacht, da das Perpendikel CD innerhalb des Dreyecks fällt (Fig. 18.). Fiele es ausserhalb (Fig. 19.), so muß man $tg.\frac{1}{2}(BD-AD)$ statt $tg.\frac{1}{2}(BD+AD)$ suchen. Die Analogien und die daraus hergeleiteten Gleichungen bleiben ganz ungeändert, wenn man unter A den äussern Winkel CAD versteht. Man verwechsele also die Theile der Gleichung Nr. 3. und verfahre wie vorher, so erhält man,

$sin.\frac{1}{2}(A+B).tg.\frac{1}{2}(BD-AD)=sin.\frac{1}{2}(A-B).$
$tang.\frac{1}{2}(BC+AC)$

und wenn man das Product der Gleichungen Nr. 2, 3, kreuzweise gemacht, durch die Nro. 1. dividirt,

$cos.\frac{1}{2}(A+B).tang.\frac{1}{2}(BD-AD)=cos.\frac{1}{2}(A-B).$
$tang.\frac{1}{2}(BC-AC).$

Sezt man in diesen beiden Gleichungen für A den innern Winkel CAB, der auch durch A bezeichnet wird, so muß man $180°-A$ statt A schreiben. Es ist aber $sin.\frac{1}{2}(180°-A+B)=cos.\frac{1}{2}(A-B)$ und $sin.\frac{1}{2}(180°-A-B)=cos.\frac{1}{2}(A+B)$; wie auch $cos.\frac{1}{2}(180°-A+B)=sin.\frac{1}{2}(A-B)$; $cos.\frac{1}{2}(180°-A-B)=sin.\frac{1}{2}(A+B)$. Also werden die beiden Gleichungen für (Fig. 19.) $cos.\frac{1}{2}(A-B).tang.\frac{1}{2}AB=cos.\frac{1}{2}(A+B).tg.\frac{1}{2}(BC+AC)$ und $sn.\frac{1}{2}(A-B).tang.\frac{1}{2}AB=sin.\frac{1}{2}(A+B).tang.\frac{1}{2}(BC-AC)$, welches dieselben Gleichungen mit denen für den Fall der (Fig. 18.) sind. Es ist also überhaupt,

wenn

wenn man die (XIV) angenommenen Bezeichnungen braucht,

156) $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A-B).\ tang.\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)} = tang.\frac{1}{2}(a-b)$

157) $\frac{\cos.\frac{1}{2}(A-B).\ tang.\frac{1}{2}c}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)} = tang.\frac{1}{2}(a+b)$

Diese beiden Gleichungen dienen, aus zwey Winkeln mit der eingeschlossenen Seite jede der beiden übrigen zu finden. Die halbe Summe und der halbe Unterschied addirt geben die grössere Seite, subtrahirt die kleinere. Eben dieses leistet zwar auch die Formel (150), diese sind aber bequemer, wenn man beyde Seiten sucht, auch lassen sich die Logarithmen vortheilhafter dabey gebrauchen.

XIX.

Auf eben diese Art multiplicire man die Gleichungen, welche aus den Analogien (151. 153. 155) entstehen,

1. $tg.\frac{1}{2}(A+B).\ tg.\frac{1}{2}(BC-AC) = tg.\frac{1}{2}(A-B).\ tg.\frac{1}{2}(BC+AC)$

2. $\sin.\frac{1}{2}(BC-AC).\cos.\frac{1}{2}(BC-AC) = tg.\frac{1}{2}(BCD+ACD).\ tg.\frac{1}{2}(BCD-ACD).\ \sin.\frac{1}{2}(BC+AC).\ \cos.\frac{1}{2}(BC+AC)$

3. $tg.\frac{1}{2}(BCD-ACD) = tg.\frac{1}{2}(A+B).tg.\frac{1}{2}(A-B).\ tg.\frac{1}{2}(BCD+ACD)$

in einander, so bekömt man

$\sin.\frac{1}{2}(BC-AC)^2 = tg.\frac{1}{2}(A-B)^2.\sin.\frac{1}{2}(BC+AC)^2.\ tg.\frac{1}{2}(BCD+ACD)^2$

oder

oder $\text{sn.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(A-B).\text{sn.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}C}$

Wenn man das Product der zweyten und dritten Gleichung durch die erste dividirt, so bekömt man

$\text{cs.}\frac{1}{2}(BC-AC)^2 = \frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(A+B)^2.\text{cos.}\frac{1}{2}(BC+AC)^2.}{\text{tg.}\frac{1}{2}(BCD+ACD)^2}$, oder

$\text{cos.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(A+B).\text{cos.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}C}$

Man verwechsele die beyden Theile der Gleichung Nr. 3. und verfahre wie zuerst, so erhält man,

$\text{tg.}\frac{1}{2}(A+B).\text{sin.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}(BCD-ACD)}$

und, wenn man mit der Gleichung Nr. 1. dividirt statt zu multipliciren,

$\text{tg.}\frac{1}{2}(A-B).\text{cos.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}(BCD-ACD)}$

In diesen beiden leztern Formeln bedeutet aber A den äussern Winkel CAD der fig. 19. Sezt man dafür 180° — A, wodurch A den innern Winkel CAB bezeichnet, und C oder ACB für BCD—ACD, so wird,

weil $\text{tang.}\frac{1}{2}(180° - A + B) = \text{cot.}\frac{1}{2}(A - B)$, und $\text{tg.}\frac{1}{2}(180° - A - B) = \text{cot.}\frac{1}{2}(A+B)$, die erstere dieser Gleichungen

$\text{cot.}\frac{1}{2}(A-B).\text{sin.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{sn.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}C}$

oder $\text{sn.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(A-B).\text{sn.}\frac{1}{2}(AC+BC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}C.}$

Und die zweyte eben so,

$\text{cs.}\frac{1}{2}(BC-AC) = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B).\text{cs.}\frac{1}{2}(BC+AC).}{\text{tang.}\frac{1}{2}C}$

welches dieselben Gleichungen mit den für den Fall der Fig. 18. gefundenen sind.

Es ist demnach, die (XIV) angenommenen Bezeichnungen gebraucht,

$$158)\quad \frac{\sin.\frac{1}{2}(a-b).\cot.\frac{1}{2}C}{\sin.\frac{1}{2}(a+b)} = \mathrm{tang}.\frac{1}{2}(A-B)$$

$$159)\quad \frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b).\cot.\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)} = \mathrm{tang}.\frac{1}{2}(A+B)$$

Diese Formeln dienen, aus zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel jeden der übrigen Winkel zu finden. Es ist noch zu merken, daß sie aus den beiden (156. 157) fliessen, wenn man daselbst 180° — a für A, 180° — b für B, 180° — C für c, wie auch für a und b ihre dieser Substitution gemässe Wehrte sezt, welches mit (XVI) übereinstimt.

XX.

Es ist $2(\sin.\frac{1}{2}A)^2 = 1 - \cos.A$ (32), und $\cos.A$

$$= \frac{\cos.a - \cos.b.\cos.c}{\sin.b.\sin.c} \quad (145)$$

also $2(\sin.\frac{1}{2}A)^2 = \dfrac{\sin.b.\sin.c + \cos.b.\cos.c - \cos.a}{\sin.b.\sin.c}$

$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\sin.b.\sin.c} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(a+b-c).\sin.\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin.b.\sin.c}$$

(28. 49) und

$$160)\quad (\sin.\tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c).\sin.\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin.b.\sin.c}$$

Gleich-

Gleichfalls ist

$$161)\ (\text{cos}.\tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{\text{sin}.\frac{1}{2}(b+c+a).\ \text{sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sin}.b.\ \text{sin}.c}$$

Denn es ist $1 + \text{cos}.A = 2(\text{cos}.\tfrac{1}{2}A)^2$ (31), aber

$$1 + \text{cos}.A = \frac{\text{sin}.b.\ \text{sin}.c - \text{cos}.b.\ \text{cos}.c + \text{cos}.a}{\text{sin}.b.\ \text{sin}.c} =$$

$$\frac{\text{cos}.a - \text{cs}.(b+c)}{\text{sin}.b.\ \text{sin}.c} = \frac{2\,\text{sn}.\frac{1}{2}(b+c+a).\ \text{sn}.\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sin}.b.\ \text{sin}.c.}$$

(27. 49), woraus die vorgesezte Formel folget.

Diese Formeln sind zur Rechnung mit Logarithmen sehr brauchbar, so wie die beiden folgenden.

XXI.

$$162)\ (\text{sin}.\tfrac{1}{2}a)^2 = -\frac{\text{cs}.\frac{1}{2}(A+B+C).\text{cs}.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C}$$

$$163)\ (\text{cs}.\tfrac{1}{2}a)^2 = \frac{\text{cs}.\frac{1}{2}(A+B-C).\text{cs}.\frac{1}{2}(A-B+C)}{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C}$$

Denn es ist

$$2\,(\text{sin}.\tfrac{1}{2}a)^2 = 1 - \text{cos}.a =$$

$$\frac{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C - \text{cos}.B.\ \text{cos}.C - \text{cos}.A}{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C} =$$

$$\frac{-\text{cos}.(B+C) - \text{cos}.A}{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C} =$$

$$\frac{-2\,\text{cos}.\frac{1}{2}(A+B+C).\ \text{cos}.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sin}.B.\ \text{sin}.C}$$

(148. 27. 48)

Und $2(\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}a)^2 = 1 + \text{cos.}\,a$

$$= \frac{\text{sin.B. sin.C} + \text{cos.B. cos.C} + \text{cos.A}}{\text{sin.B. sin.C}}$$

$$= \frac{\text{cos.}(B - C) + \text{cos.A}}{\text{sin.B. sin.C}}$$

$$= \frac{2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A + B - C).\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(A - B + C)}{\text{sin.B. sin.C}}$$

Man erhält auch diese Formeln aus (161.160) wenn man für die Seiten und Winkel die Complemente der gegenüberstehenden Winkel und Seiten schreibt.

Das Quadrat des sin. $\tfrac{1}{2}a$ ist zwar negativ ausgedrückt; es ist aber doch positiv, weil die Summe der Winkel A + B + C grösser als zwey und kleiner als sechs Rechte, ihre halbe Summe grösser als ein Rechter und kleiner als drey Rechte, und der Cosinus derselben folglich negativ ist. Denn es ist in einem bey A rechtwinklichten sphärischen Dreyeck ABC, (Fig. 16.)

$$\left.\begin{aligned} 1 : \text{cos.AC} &= \text{sin.C} : \text{cos.B} \\ 1 : \text{cos.AB} &= \text{sin.B} : \text{cos.C} \end{aligned}\right\} (136)$$

folglich 1 : cos.AC. cs.AB = sn.B. sn.C : cs.B. cs.C und also cos.B. cos.C — sin.B. sin.C = sin.B. sin.C. (cos.AC. cos.AB — 1) oder cos. (B + C) = sin.B. sin.C. (cos.AC. cos.AB — 1). Hier ist nun der zweyte Factor immer verneint, weil cs.AC, cs.AB eigentliche Brüche sind. Also ist cs.(B + C) verneint, oder die Summe der Winkel B + C

ist

ist grösser als ein Rechter, und kleiner als drey Rechte.

Ein nicht rechtwinklichtes Dreyeck läßt sich in zwey rechtwinklichte zerfällen, deren Winkel ausser den beyden rechten an einander liegenden die Summe seiner drey Winkel ausmachen. Man kan nemlich das Perpendikel immer zwischen zwey gleichnahmige Winkel fällen. Also ist die Summe der drey Winkel eines sphärischen Dreyecks immer grösser als zwey Rechte, und kleiner als sechs Rechte.

XXII.

Hieraus folgt auch noch

$$164)\quad (\text{tg.}\tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c).\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(b+c+a).\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$165)\quad (\text{tg.}\tfrac{1}{2}a)^2 = -\frac{\text{cs.}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{cs.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{cs.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\ \text{cs.}\tfrac{1}{2}(A-B+C)}$$

Zufolge der erstern dieser Formeln ist

$$\text{tang.}(\tfrac{1}{2}B)^2 = \frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(b+a-c).\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(b-a+c)}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+c+b)\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}$$

und da $\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A\pm B) = \dfrac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}A \pm \text{tang.}\tfrac{1}{2}B}{1 \mp \text{tang.}\tfrac{1}{2}A.\text{tang.}\tfrac{1}{2}B}$

(35.36.) so setze man in dieser Gleichung für tg. ½A und tang. ½B die eben gefundene Wehrte, so erhält man nach den gehörigen Substitutionen die Formeln (158. 159.) welche vorher aus den zuerst zum Grunde gelegten Analogien oder Glei-

chungen unmittelbar hergeleitet sind. Auf eine ähnliche Art erhält man durch (165) die Formeln (156. 157.) Man sehe Principes de la trigon. spher. par M. Euler. Mem. de Berlin 1753. p. 245. sqq.

XXIII.

Für das Perpendikel CD (Fig. 18.), welches in einem sphärischen Dreyeck ABC auf die Seite AB = c gefällt wird, ist, sin. CD = sin. AC. sin A = sin. b. sin. A = 2 sin. b. sin. $\frac{1}{2}$ A. cos. $\frac{1}{2}$ A. Also ist, wenn man für sin. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A ihre Wehrte aus (160. 161) sezt,

166) $\sin. CD = 2\sqrt{(\sin.\frac{1}{2}(a+b-c).\sin.\frac{1}{2}(a-b+c).\sin.\frac{1}{2}(b+c+a).\sin.\frac{1}{2}(b+c-a))} : \sin. c$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen, wenn man die beyden ersten Factores, wie die beyden lezten, in die Differenz zweyer Cosinus (45) zerfällt, ist $= \frac{1}{4}(\cos.(b-c) - \cos. a).(\cos. a - \cos.(b+c))$ $= \frac{1}{4}(\cos. a. \cos.(b-c) - \cos. a^2 - \cos.(b-c). \cos.(b+c) + \cos. a. \cos.(b+c)) = \frac{1}{4}(2\cos. a. \cos. b. \cos. c - \cos. a^2 - \frac{1}{2}\cos. 2b - \frac{1}{2}\cos. 2c)$ $= \frac{1}{4}(2\cos. a. \cos. b. \cos. c - \cos. a^2 + \frac{1}{2} - \cos. b^2 + \frac{1}{2} - \cos. c^2) = \frac{1}{4}(2\cos. a. \cos. b. \cos. c - \cos. a^2 - \cos. b^2 + \sin. c^2$. Die Formeln für die Substitutionen sind in (27. 28. 44. 31.) enthalten. Folglich ist

167) $\sin. CD = \sqrt{(2\cos. a. \cos. b. \cos. c - \cos. a^2 - \cos. b^2 + \sin. c^2)} : \sin. c$

Wenn

Wenn AB oder $c = 90°$ ist, so ist

168) $\sin. CD = \sqrt{(1 - \cos. a^2 - \cos. b^2)}$

$= \sqrt{(-\frac{1}{2}\cos. 2a - \frac{1}{2}\cos. 2b)}$

$= \sqrt{-\cos. (a+b). \cos. (a-b)}$

Es ist nemlich $\frac{1}{2} - \cos. a^2 = -\frac{1}{2}\cos. 2a$, und $\frac{1}{2} - \cos. b^2 = -\frac{1}{2}\cos. 2b$ nach (31); die Substitution der Factoren geschicht nach (48). Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist würklich positiv, ob sie gleich negativ bezeichnet ist. Es muß nemlich $a+b$ grösser als ein Quadrant, und daher $\cos. (a+b)$ verneint seyn. Dis ist er auch, weil zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks grösser seyn müssen als die dritte, da sie sich sonst nicht schneiden könnten; * und da nun eine ein Quadrant gesezt wird, so sind die beiden übrigen grösser als ein Quadrant.

Diese Formel dient, den Winkel einer Linie CO mit einer Ebenen AOB aus den Winkeln COA, COB, welche sie mit zwey in dieser Ebene gezogenen Linien AO, BO macht, die nebst ihr sich in O begegnen, und aus dem Winkel dieser Linien AOB zu bestimmen. Dieser Winkel der Linie CO mit der Ebene ist der COD, welchen sie mit OD macht, worin AOB von einer durch CO auf sie senkrecht gesezten Ebene geschnitten wird. Das Maaß dieses Winkels ist der senkrechte Bogen CD in dem sphärischen Dreyeck ABC, in welchem AC, BC, AB die Maassen der gegebenen Winkel AOC, BOC, AOB sind.

* Geometrischer beym Euclides L. XI. prop. 20.

XXIV.

Zum Gebrauch der Rechnung wird es dienlich seyn, die verschiedenen Fälle, wie die Stücke in einem Dreyecke unter den gegebenen oder das gesuchte seyn können, aus einander zu setzen, und die zur Auflösung dienenden Formeln anzuweisen.

Erstlich, das Gesuchte und Gegebene sind zwey Seiten und die gegenüberstehenden Winkel.

Gegeben		Gesucht	Formeln
1) BC, B, AC	— —	A	143
2) BC, B, A	— —	AC	144

Zweytens, oder zwey Seiten und zwey Winkel, deren einer von jenen eingeschlossen ist.

Gegeben		Gesucht	Formeln
3) BC, B, BA	—	A, C	149.158.159
4) BC, B, C	—	AC, AB,	150.156.157
5) BC, B, AC	—	C	zweydeutig
6) BC, B, A	—	AB	zweydeutig

Drittens, drey Seiten und ein Winkel.

Gegeben		Gesucht	Formeln
7) BC, B, AB	—	AC,	146
8) BC, B, AC	—	AB,	zweydeutig
9) BC, AB, AC	—	A	145.160.161

Viertens, drey Winkel und eine Seite.

Gegeben		Gesucht	Formeln
10) BC, B, C	— —	A	147
11) BC, B, A	— —	C	zweydeutig
12) A, B, C	— —	AC	148.162.163

XXV.

XXV.

Man kan die Fälle 3—12 auch so auflösen, daß man das schiefwinklichte Dreyeck (Fig. 18.) in zwey rechtwinklichte zerfällt, so daß, wenn unter den gegebenen Stücken ein Winkel B und eine Seite BC vorkömt, das Perpendikel diese nicht durchschneide. Hieraus findet man BD oder BCD, woraus sich, wenn AB oder C gegeben ist, AD oder ACD ergibt, wodurch man vermittelst einer der Formeln (139—142) in dem Dreyeck ACD das übrige findet.

Wenn AC oder A gegeben sind, so findet man vermittelst eben dieser Analogien das übrige Segment AD oder den Winkel ACD. Wenn alle drey Seiten oder Winkel gegeben sind, so findet man durch (154, 155) mit jenen Formeln verbunden, jedes der Segmente AD, BD oder ACD, BCD.

Die Analogien, welche so gemacht werden müssen, sind

für 3) $1 : \text{tang.}\,CB = \text{cos.}\,B : \text{tang.}\,BD.$ (134)

$\text{sin.}\,AD : \text{sin.}\,BD = \text{tang.}\,B : \text{tang.}\,A.$ (139)

Das Segment BD von AB abgezogen, läßt AD. Wenn BD > AB, so wird AD und sin. AD negativ, folglich auch tang. A, wenn die beiden mitlern Glieder bejaht sind. Man kan die beiden äussern Glieder wieder positiv setzen, muß aber A stumpf nehmen. So bestimmen in allen übrigen Fällen die Zeichen der trigonometrischen Functionen die Beschaffenheit des Winkels A, so lange er nicht über zwey Rechte ist. Würde der Win-

kel C gesucht, so müste man das Perpendikel von A auf BC fällen, und A für C schreiben.

für 4) $1 : \cos BC = \tan B : \cot BCD$ (137)

$\cos ACD : \cos BCD = \tan BC : \tan AC$ (149)

Der Winkel BCD von C abgezogen gibt ACD, woraus gleich erhellt, auf welche Seite des Perpendikels AC fällt. In beyden Fällen sind BC und AC gleichnahmig, wenn nicht ACD oder BCD stumpf ist.

für 5) $1 : \cos BC = \tan B : \cot BCD$ (137)

$\tan CA : \tan BC = \cos BCD : \cos ACD$ (140)

Die Winkel BCD, ACD addirt oder von einander subtrahirt geben C. Es ist aber zweifelhaft, welches von beiden geschehen muß, wenn nicht etwa die Umstände der Rechnung es an die Hand geben.

für 6) $1 : \tan CB = \cos B : \tan BD$ (134)

$\tan A : \tan B = \sin BD : \sin AD$ (139)

Wenn BAC oder A stumpf ist, und B spitz, so wird tang. A und sin. AD verneint, und es wird AD von BD abzuziehen seyn, die für ein spitzes A zu einander zu addiren sind.

für 7) $1 : \tan BC = \cos B : \tan BD$ (134)

$\cos BD : \cos AD = \cos BC : \cos AC$ (141)

für 8) $1 : \tan CB = \cos B : \tan BD$

$\cos BC : \cos AC = \cos BD : \cos AD$

Hier ist es wiederum zweifelhaft, ob BD und AD zu addiren oder von einander zu subtrahiren sind.

für 9) $\tan \frac{1}{2}AB : \tan \frac{1}{2}(BC + AC) = \tan \frac{1}{2}(BC - AC) :$

$\tan \frac{1}{2}(BD - AD)$ (154)

$\tan AC : 1 = \tan AD : \cos A$ (134)

Wenn

Wenn man BD — AD von BD + AD = AB abzieht, so erhält man 2AD und daraus tg. AD. Wenn AD negativ ist, (Fig. 19.) so ist BD-AD = AB eigentlich die arithmetische Summe und BD + AD die Differenz. Diese von jener abgezogen, erhält man — 2AD, und tang. AD wird negativ, daher auch cos. A, wenn nicht etwa tang. AC verneint ist, und es ist CAB stumpf zu nehmen.

für 10) 1 : cos. BC = tang. B : cot. BCD (137)

sin. BCD : sin. ACD = cos. B : cos. A (142)

für 11) 1 : cos. BC = tang. B : cot. BCD.

cos. B : cos. A = sin. BCD : sin. ACD

Die Winkel BCD, ACD werden addirt oder subtrahirt, nachdem CAB spitz oder stumpf ist, vorausgesezt, daß B spitz ist.

für 12) 1 : tang. $\frac{1}{2}$(A + B). tg. $\frac{1}{2}$(A — B) = tang. $\frac{1}{2}$C : tang. $\frac{1}{2}$(BCD — ACD) (155)

tang. ACD : cot. A = 1 : cos. AC (137)

Der Winkel BCD — ACD von BCD + ACD = C abgezogen läßt 2ACD, woraus man die zweyte Analogie formiren kan.

Die Analogien für die Fälle 5, 6, 8, 11, geben das gesuchte, welches in den Gleichungen 146. 147. 149 einen doppelten Wehrt hatte. Sie geben beide Wehrte, und in den Fällen 6, 11 die Entscheidung, welches derjenige sey, welchen man vor dem andern sucht, weil die Beschaffenheit der Winkel es entscheidet, ob das Perpendikel innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks fällt.

Zur Rechnung in benannten Zahlen sind diese Analogien nicht von so sicherem Gebrauch, wie die

die Formeln (145—150). Denn man muß z. E. für den Fall 3, den Bogen BD schärfer berechnen, als man A zu wissen verlangt, weil davon sin. BD abhängt, wodurch A gefunden werden muß, und so in allen übrigen. In jenen Formeln aber sind die beyden Theile, woraus die trigonometrische Function des zu suchenden Stückes zusammengesezt wird, von einander unabhängig. Sie liefern ohne Interpolation oder durch eine leichte und sichere den Winkel bis auf Minuten und darüber. Am bequemsten sind die Formeln (156—163) welche die am meisten vorkommende Fälle enthalten.

XXVI.

Wenn zwey Dreyecke zwey ähnlich liegende Theile mit einander gemein, und zwey andere auch ähnlich liegende verschieden haben, so bestimmen sich jene aus diesen. Man bekömt nemlich für diese beyden Dreyecke zwey Gleichungen und zwey unbekannte Grössen. Es seyn die Seiten des einen Dreyecks a, b, c, der a gegenüberstehende Winkel A, und die Seiten des andern a′, b, c, der a′ gegenüberstehende Winkel sey A′, so hat man aus (146) die Gleichungen;

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$
$$\cos a' = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A'$$

oder $\cos a - \cos a' = \sin b . \sin c . (\cos A - \cos A')$

oder $\dfrac{\cos a - \cos a'}{\cos A - \cos A'} = \sin b . \sin c.$

Eben

Eben diese Gleichungen folgendergestalt ausgedrückt,

$$\frac{\text{cos. } a}{\text{cos. } A} = \frac{\text{cos. } b . \text{cos. } c}{\text{cos. } A} + \text{sin. } b . \text{sin. } c$$

$$\frac{\text{cos. } a'}{\text{cos. } A'} = \frac{\text{cos. } b . \text{cos. } c}{\text{cos. } A'} + \text{sin. } b . \text{sin. } c$$

und von einander abgezogen, geben

$$\frac{\text{cos. } a'}{\text{cos } A'} - \frac{\text{cos. } a}{\text{cos. } A} = \text{cos. } b . \text{cos. } c \left(\frac{1}{\text{cos. } A'} - \frac{1}{\text{cos. } A} \right)$$

oder $\text{cs. } A . \text{cs } a' - \text{cs. } A' . \text{cs. } a = \text{cs. } b . \text{cs. } c (\text{cs. } A - \text{cs. } A')$

oder $\dfrac{\text{cos. } A . \text{cos. } a' - \text{cos. } A' . \text{cos. } a}{\text{cos. } A - \text{cos. } A'} = \text{cos. } b . \text{cos. } c$

Weil nun $\text{cos. } (b \pm c) = \text{cos. } b . \text{cos. } c \mp \text{sin. } b . \text{sin. } c$

so wird $\text{cs. } (b + c) = \dfrac{\text{cs. } a' (\text{cs. } A + 1) - \text{cos. } a (\text{cs. } A' + 1)}{\text{cos. } A - \text{cos. } A'}$

Und wenn man für $1 + \text{cos. } A$ seinen Wehrt $2 (\text{cos. } \tfrac{1}{2} A)^2$ (31) und eben so für $1 + \text{cos. } A'$, wie auch $2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} (A' + A) . \text{sin. } \tfrac{1}{2} (A' - A)$ für $\text{cos. } A - \text{cos. } A'$ schreibt, so ist

169) $\text{cos. } (b + c) = \dfrac{\text{cos. } a' (\text{cos. } \tfrac{1}{2} A)^2 - \text{cs. } a (\text{cs. } \tfrac{1}{2} A')^2}{\text{sin. } \tfrac{1}{2} (A' + A) . \text{sin. } \tfrac{1}{2} (A' - A)}$

Gleichermaassen ist

170) $\text{cos. } (b - c) = \dfrac{\text{cs. } a (\text{sn. } \tfrac{1}{2} A')^2 - \text{cs. } a' (\text{sn. } \tfrac{1}{2} A)^2}{\text{sn. } \tfrac{1}{2} (A' + A) . \text{sn. } \tfrac{1}{2} (A' - A)}$

Aus

Aus der Summe und Differenz der Seiten b und c findet man bekanntermaassen jede derselben.

Nach der Methode dieser Auflösung kan man mehrere machen. In den comm. Petrop. Vet. T. V. p. 25. sqq. findet man dergleichen mit ihrem Gebrauche in der Astronomie.

XXVII.

Die Fläche eines sphärischen Dreyecks findet man nicht schwer durch die Analysis des unendlichen. Weil ein schiefwinklichtes in zwey rechtwinklichte zerfällt, so braucht man nur, die Rechnung leichter zu machen, die Fläche eines rechtwinklichten zu suchen. Es sey also (Fig. 21.) DCE ein Halbkreis mit dem Halbmesser = 1 beschrieben, DOE ein andrer, dessen Ebene auf jenes senkrecht stehet, und dessen Pol C ist. Die Ebene eines dritten Kreises AO stehe auf die des Kreises ACE senkrecht, und noch ein Kreis CBM gehe durch den Pol C, und schneide die Kreise AO, DE in B und M. So erhält man ein sphärisches bey A rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Fläche nun soll gefunden werden. Zu dem Ende ziehe man den Bogen CN, welcher AB in n schneidet, so ist das Dreyeck BCn der Unterschied der beyden Dreyecke ACB, ACn, und der lezte Ausdruck desselben, welchen man erhält, wenn man den Winkel BCn ohne Ende klein annimt, ist das Differential des Dreyecks ABC. Man ziehe durch B und n die Parallelkreise Bp, mn, deren Ebenen mit der des Kreises DE parallel liegen,

gen, oder die mit den Sinus der Bogen CB, Cm als Halbmessern beschrieben sind, so ist der lezte Ausdruck des Dreyecks CBn der für die Fläche Cmn oder CBp, welches zwischen den größten Cirkeln CB, Cn und den Parallelbogen mn oder Bp enthalten ist. Es ist gleichgültig, welches man nimt, weil für einen ohne Ende verminderten Winkel BCn, beyde sich ohne Ende einander nähern.

Man nenne AC = b, BC = x, AB = y, ABC = φ, ACB = ω, so ist nach der in der Differentialrechnung gebräuchlichen Bezeichnung das Differential von ω, oder der lezte Ausdruck des Winkels BCn = $d\omega$, und dx von pn; der Bogen MN, welcher auf DE das Maaß desselben ist, ist ebenfalls = $d\omega$ (1 Kap. IX), und mn oder Bp = $d\omega$. sin. x. (eb. das.) Das Differential von CBp ist der lezte Ausdruck der Fläche Bpnm, welche sich einem ebenen Parallelogramen ohne Ende nähert, nemlich pn × Bp = dx. $d\omega$. sin. x, und dx. sin. x ist das Differential des cos. x, um welches dieser abnimt, wenn x um dx wächst, oder es ist dx. sin. x = — d. cos. x. * Es ist also für denselben Winkel BCn oder $d\omega$, die Fläche CBp = $d\omega$. ∫dx. sin. x = — $d\omega$. cos. x + Const. Diese beständige Grösse muß so beschaffen seyn, daß CBp = 0 werde, wenn x = 0, oder wenn cos. x = 1 ist. Sie ist also + $d\omega$, und daher ist CBp = $d\omega$ (1 — cos. x)

Die

* S. Kästners Anal. unendl. Gr. §. 296. und von dem Differential des Sinus §. 281.

Die Grösse, deren Wachsthum zulezt durch dieses Differential ausgedrückt wird, oder das Integral desselben, ist die gesuchte Fläche des Dreyecks ABC. Das Differential besteht aus zwey Stücken dω und dω. cos. x; das Integral von dω ist $= \omega$. Das von dω. cos. x zu finden, muß man für diesen Ausdruck einen gleichgültigen suchen, worin nur eine veränderliche Grösse vorkomt. Nun ist 1 : cos. b. = sin. ω : cos. φ (136) oder cos. b. sin. ω = cos. φ; also ist cos. b. cos. ω. dω = — sin. φ. dφ. Und weil nach eben dieser Analogie auch 1 : cos. y = sin. φ : cos. ω, oder cos. y. sin. φ = cos. ω ist, so erhält man durch die Substitution des Wehrtes von cos. ω, cos. b. cos. y. dω = — dφ.

Es ist aber cos. b. cos. y = cos. x (135), folglich ist — cs. x. dω = dφ, und $\int$ — cs. x. dω = φ; daher ist ΔABC $= \int$ dω (1 — cos. x) $= \omega + \varphi$ + Const. Diese beständige Grösse muß so beschaffen seyn, daß die Fläche = 0 werde, wenn $\omega = 0$ ist. Alsdenn ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder ein rechter Winkel; und es ist daher Const. $= - \frac{1}{2}\pi$, und ΔABC $= \omega + \varphi - \frac{1}{2}\pi$.

Es ist also der Inhalt eines jeden sphärischen Dreyecks ABC, (Fig. 18.) welches in zwey rechtwinklichte BCD, ACD zerfällt, = CBD + BCD + ACD + CAD — π = CBD + ACB + CAB — π oder wenn das Perpendikel ausserhalb des Dreyecks liegt, (Fig. 19.) = CBD + BCD — $\frac{1}{2}\pi$ — CAD — ACD + $\frac{1}{2}\pi$ = CBD + ACB + CAB — π. Oder

171)

171) Der Inhalt eines sphärischen Dreyecks ist gleich dem Quadrat des Halbmessers durch den Ueberschuß seiner drey Winkel über zwey Rechte multiplicirt, diese sowohl wie jene durch den Halbmesser als die Einheit ausgedrückt.

Die Einheit für die Flächen ist nemlich das Quadrat der Einheit, womit die Linien, welche dieselbe begrenzen oder sonst in ihr gezogen sind, gemessen werden. Wenn man den Halbmesser r nicht zur Einheit genommen hätte, so hätte man statt 1, ω, φ, π, sin.x, cos.x, schreiben müssen r, $r\omega$, $r\varphi$, $r\pi$, r sin.x, r cos.x, und so bekäme man für den Inhalt des sphärischen rechtwinklichten Dreyecks $r(r\omega + r\varphi - \frac{1}{2}r\pi)$, wenn man die Winkel durch den Halbmesser r mißt, oder $rr(\omega + \varphi - \frac{1}{2}\pi)$, wenn die Winkel ω, φ, $\frac{1}{2}\pi$ durch den Halbmesser als die Einheit gemessen werden.

Wenn der Winkel $C = \pi$ (Fig. 21.), und jede der beiden Seiten AC, CB ein Quadrant, folglich $A = B = \frac{1}{2}\pi$ ist, so wird das Dreyeck die halbe Halbkugel, und es ist also diese $= \pi$, folglich die ganze Oberfläche der Kugel $= 4\pi$, für den Halbmesser $= 1$ oder $4rr\pi$ wenn der Halbmesser $= r$ ist. Weil nun $2r\pi$ der Umfang durch diesen Halbmesser ausgedrückt ist, so ist die Oberfläche der Kugel gleich dem Producte aus dem Durchmesser in den Umfang, oder viermal so groß als die Fläche des grösten Kreises der Kugel, als welche $2r\pi \times \frac{1}{2}r = rr\pi$ ist.

Weil die Oberfläche der Kugel $= 4rr\pi$ und die eines Dreyecks das Quadrat des Halbmessers durch den Ueberschuß seiner Winkel über zwey Rechte multiplicirt ist, so verhält sich 4π zu diesem Ueberschuß wie die Oberfläche der Kugel zu der des Dreyecks; Oder, wie sich verhalten 720° zu dem Ueberschuß der Summe der drey Winkel über 180°, so verhält sich die Oberfläche der Kugel zur Oberfläche des Dreyecks.

Je grösser das Dreyeck auf derselben Kugel ist, desto grösser ist der Ueberschuß seiner Winkel über zwey Rechte. Je kleiner es ist, desto kleiner ist dieser Ueberschuß, welcher nicht eher verschwindet, als bis das sphärische Dreyeck sich einem ebenen ohne Ende genähert hat, oder bis es ohne Ende klein geworden ist.

Die Fläche eines sphärischen Dreyecks ist das Maaß des körperlichen Winkels, welchen die Ebenen seiner Seiten einschliessen. So wie man den Raum zwischen zwey geraden Linien gleicher Länge für das Maaß ihres Winkels nehmen kan, so kan man den Raum, der (Fig. 16.) zwischen den Sectoren AOB, AOC, BOC mit demselben Halbmesser beschrieben, enthalten ist, für das Maaß des körperlichen Winkels ihrer Ebenen, oder der Grösse der Ecke, die sie formiren, annehmen. Für jenen nimt man bequemer den Bogen des Sectors und so auch für diesen die zugehörige Portion der Kugelfläche.

Wenn

Wenn eine Ecke aus mehr als drey Seiten besteht, so kan man sie in dreyseitige zerfällen und ausmessen.

Durch Hülfe des gefundenen Satzes kan man jede zwischen grösten Cirkeln begrenzte Portion der Kugelfläche ausrechnen, welches in der Geographie von Brauchbarkeit ist.

Siebentes Kapitel

Beyspiele von dem Gebrauch der sphärischen Trigonometrie.

Die sphärische Trigonometrie ist in der Astronomie von vorzüglichem Gebrauch, aber nicht allein daselbst, sondern allenthalben wo von der Lage ebener Flächen die Frage ist. Einige Beyspiele sollen izt dis zeigen.

I.

Es sey KO der vertikale Halbmesser eines Mühlenrades (Fig. 22.); HA eine durch den untersten Punkt O desselben gezogene Horizontallinie, nach welcher sich dieser Punkt beweget; OCB ein Theil von der Fläche einer Schaufel, welche die Ebene des Rades in CO schneidet, und gegen sie unter einem gewissen Winkel geneigt ist; AOB sey eine Horizontalfläche durch AH, welche von der Schaufel in OB geschnitten wird. Man will erstlich aus der gegebenen Lage der Schaufel gegen das Rad ihre Lage gegen den Horizont, und zweytens den

Winkel der Linie AO, nach welcher sich der Punkt O beweget, mit der Schaufel bestimt haben.

Aufl. Man beschreibe aus dem Punkt O, der den drey Ebenen gemein ist, mit dem Halbmesser $= 1$ in der Ebene des Rades, der Schaufel und des Horizonts die Bogen AC, CB, AB, welche das sphärische bey A rechtwinklichte Dreyeck ABC formiren. In diesem ist gegeben der Winkel COA des Durchschnitts CO mit der horizontalen AO, und der Neigungswinkel ACB der Schaufel gegen das Rad. Die gesuchte Lage der Schaufel gegen den Horizont wird durch den Winkel AOB ihrer Durchschnittslinie gegen AO, und den Neigungswinkel CBA bestimt. Es sey AC oder AOC $= \alpha$; ACB $= \beta$, die gesuchten Winkel AB $=$ AOB $= \varphi$; ABC $= \omega$, so ist nach (133), $1 : \sin. AC = \tan g. C : \tan g. AB$, und nach (136), $1 : \cos. AC = \sin. C : \cos. B$. Also erhält man die beiden gesuchten Grössen, durch die Gleichungen:

172) $\tan g. \varphi = \sin. \alpha. \tan g. \beta$

173) $\cos. \omega = \cos. \alpha. \sin. \beta$.

Der Winkel der Linie AO mit der Ebene der Schaufel COB wird durch den senkrechten Bogen AD, der von A auf BC gefällt wird, gemessen. Dieser Bogen oder der zugehörige Winkel sey $= z$, so ist, weil in dem bey D rechtwinklichten Dreyeck ACD, $1 : \sin. AC = \sin. C : \sin. DA$, (132)

174) $\sin. z = \sin. \alpha. \sin. \beta$

Wollte man aus der gegebenen Lage der Schaufel gegen den Horizont ihre Lage gegen das Rad bestim-

bestimmen, so braucht man nur α mit φ; β mit ω zu verwechseln.

Wenn ein Wasserstrahl senkrecht auf die Schaufel stossen soll, so muß er in der auf die Schaufel senkrechten Ebene des Bogens AD senkrecht auf OD stehen. Der Winkel AOD ist $= z$, also macht der Strahl mit AO den Winkel $R + z$. Die Ebene AOD ist gegen das Rad unter dem Winkel CAD der Bogen CA, DA geneigt. Diesen findet man nach (137) durch die Analogie, $1 : \text{cos.} CA = \text{tang.} C : \text{cot.} CAD$. Also ist $\text{tang.} DAB = \text{cos.} CA . \text{tang.} C = \text{cos.} \alpha . \text{tang.} \beta$. Dieser Winkel DAB ist der Winkel der Ebene AOD mit dem Horizont. Hieraus bestimt sich der Winkel des Strahls mit dem Horizont. Denn wenn man (Fig. 17.) den Winkel A der beyden Ebenen ECA, EBA und den Winkel COA einer Linie CO in der ersten Ebene mit EA weiß, so findet man den Winkel dieser Linie mit EBA, welcher durch den Bogen CD in der senkrechten Ebene COD gemessen wird, durch die Analogie $1 : \text{sin.} A = \text{sin.} AOC : \text{sin.} CD$.

Wäre die Schaufel senkrecht auf die Ebene des Rades, so ist $\beta = 90°$; folglich $z = \alpha$, die Ebene AOD fällt in die des Rades, und der Strahl ist gegen den Horizont unter dem Winkel $90° - \alpha = 90° - \omega$ geneigt.

Es kan auch die Ebene BOC einen Windmühlenflügel, oder eigentlich wegen der nicht gleichen Lage seiner Theile, ein Element desselben bedeuten. Die bewegende Kraft stößt senkrecht auf AOC,

die Ebene des Rades, wenn die Richtung des Windes horizontal ist.

II.

Die ganze Gnomonik, in so fern sie die Schattenlinien auf einer ebenen Fläche verzeichnen lehrt, ist eigentlich nur ein einziges Problem der sphärischen Trigonometrie. Die Sonne beschreibt um die Axe der Erde in gleichen Zeiten gleiche Winkel. Man stelle sich bloß die Fläche des Aequators nebst der Axe der Erde wie eine Stange darauf senkrecht aufgerichtet, vor, so wird der Schatten dieser Stange um den Mittelpunkt der Erde auf dem Aequator in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreiben. Wenn dieser Schatten von einer jeden andern Ebene, die durch den Mittelpunkt des Aequators geht, aufgefangen wird, und die Bewegung des Schattens auf derselben verzeichnet werden soll, so komt es darauf an, aus der Lage der Stundenkreise unter einander, und eines unter ihnen gegen die gegebene Ebene den Winkel der Durchschnitte der beyden Stundenkreise mit der Ebene zu finden. Zu dem Ende sey (Fig. 23.) AEQ der Aequator, APQ der Meridian des gegebenen Ortes, P der Nordpol, PO die Erdaxe, PCE ein jeder andrer Stundenkreis, dessen Lage gegen PA, die der Winkel APE ist, durch die Zeit gegeben wird. Nemlich wie 24 Stunden zu der gegebenen Zeit vor oder nach Mittage, so verhalten sich 360° zu APE, welcher Winkel auf der östlichen oder westlichen Seite des Meridians zu nehmen ist, nachdem die Zeit von Mittag

tag an gerechnet, Vor- oder Nachmittagsstunden sind. Die gegebene Ebene sey BOD, welche den Aequator in OD, den Meridian in BO, den Stundenkreis in CO schneidet, und von deren Durchschnitt mit der Kugelfläche der Bogen BCD ein Theil ist. Ihre Lage sey durch den Winkel PBC mit dem Meridian, und durch den Winkel BOP ihres Durchschnitts mit demselben und der Axe gegeben. Wenn ihre Lage auf eine andere Art gegeben ist, so muß sie durch die sphärische Trigonometrie auf jene gebracht werden. Der Punkt A sey Süden, so daß die Sonne zu einer gewissen Zeit Vormittages in dem Stundenkreise PE sey. Der Schatten der Axe fällt alsdenn auf dem Aequator längst EO, auf einer oder der andern Seite der Ebene längst CO, in ihren Verlängerungen jenseits O. Zu Mittage fällt der Schatten eben so längst AO auf dem Aequator, längst BO auf der Ebene. Der Schatten hat also auf der Ebene den Winkel GOB beschrieben, unterdes daß er auf dem Aequator den Winkel EOA, proportional der Zeit beschreibt. Das Maaß des Winkels EOA ist der Bogen EA, welcher auch den Winkel CPB mißt, und von COB ist es CB. Da nun jener Winkel durch die Zeit gegeben ist, so braucht man nur in dem sphärischen Dreyeck BPC aus BPC oder P und den gegebenen Stücken PBC oder B und PB den Bogen BC zu suchen, so hat man den Schattenwinkel auf der Ebene.

Man setze in (150) für A, B, c, a
hier P, B, BP, CB

so erhält man

$$175)\ \cot.BC = \frac{\sin.B.\cot.P}{\sin.BP} + \cos.B.\cot.PB$$

Das zweyte Stück des Wehrtes von cot.BC ist unveränderlich, wie auch der Factor zu cot.P; man braucht also nur für jeden Stundenwinkel dessen Cotangente durch diesen Factor zu multipliciren, oder dis Product durch die Logarithmen zu suchen, und es zu dem beständigen Theile zu addiren.

Die Nachmittagsstunden werden gefunden, wenn man entweder cot. P und cot. BC negativ nimt, weil ihre Winkel entgegengesezte Lage bekommen, oder wenn man auf der Westseite des Meridians ein Dreyeck wie auf der Ostseite macht, und in der Formel für dasselbe den cos. B negativ nimt, weil sein Winkel das Complement des PBC ist.

Man muß bey der Anwendung dieser Formel die Zeichen der trigonometrischen Functionen gehörig zu sezen wohl in Acht nehmen. Ist der Winkel der Ebene mit dem Meridian auf der Ostseite nach Norden hin stumpf, so ist cos. B negativ, und der zweyte Theil der Formel wird für die Vormittagsstunden negativ, hingegen für die Nachmittagsstunden positiv. Wenn PB grösser als ein Quadrant ist, oder wenn die Ebene den Halbkreis APQ zwischen P und Q schneidet, so wird in der Formel der zweyte Theil negativ.

Wir wollen einige Fälle besonders vornehmen. Es sey die Ebene BOD der Horizont, so ist B = 90°;

90°; sin. B = 1, cos. B = 0. Folglich $\cot. CB = \frac{\cot. P}{\sin. PB}$, oder tang. CB = sin. PB. tang. P. Es ist aber PB die Entfernung des Pols vom Horizont, oder das Complement der Polhöhe zum Halbcirkel, weil der Punkt B unterhalb des Aequators fällt für einen Horizont, dem der Nordpol der erhabene ist. Es ist demnach die Tangente des Schattenwinkels, (des Winkels der Schattenlinie mit der Mittagslinie) gleich der Tangente des Stundenwinkels multiplicirt durch den Sinus der Polhöhe.

Es sey BOD eine Vertikalfläche, so ist PB die Entfernung des Ortes vom Pol, also sin. PB der Cosinus der Polhöhe; cot. PB die Tangente derselben; und es ist in diesem Fall die Cotangente des Schattenwinkels gleich der Summe des Products aus der Cotangente des Stundenwinkels, multiplicirt durch den Sinus des nördlichen Winkels der Ebene mit der Mittagsfläche; dividirt durch den Cosinus der Polhöhe, und des Products aus dem Cosinus jenes Winkels in die Tangente der Polhöhe.

Wenn die Ebene durch die Axe geht, so wirft der Zeiger oder die Axe keinen Schatten auf sie, weil er ganz in sie fällt. Wie man für diesen Fall zu verfahren habe, findet man in jedem Handbuche der Gnomonik. Die Aufgabe gehört alsdenn in die ebene Trigonometrie.

Eine Ebene, worauf man eine Sonnenuhr verzeichnen will, geht zwar nicht durch den Mittelpunkt des Aequators. Wenn man aber auf ihr einen Stift parallel mit der Erdaxe befestigt, so wird der Schatten dieses Stiftes auf ihr dieselben Winkel beschreiben, welche der Schatten der Erdaxe auf dem Aequator beschreiben würde, und dis wegen der fast unendlichen Entfernung der Sonne.

Wenn man die gefundene Formel zur Zeichnung einer Sonnenuhr brauchen will, so muß man vor allen den Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Mittagsfläche suchen. Wird sie zu Mittage von der Sonne beschienen, so bemerke man den Schatten eines vertikalen Stiftes auf derselben zur Zeit des wahren Mittages. Ist es nicht, so muß man auf einer andern Ebene, am besten einer horizontalen oder vertikalen, die Mittagslinie suchen, durch sie eine vertikale Fläche setzen, welches etwa durch Fäden, Stifte oder sonst geschehen kan, und ihren Durchschnitt mit der Ebene suchen. Der Winkel, den eine vertikale Ebene durch diese Mittagslinie auf die gegebene gesezt mit derselben macht, und zwar auf der Ostseite nach Norden hin, ist der Winkel B. Die Ebene wird gewöhnlich, wenn sie keine horizontale ist, eine vertikale seyn, für welche dieser Winkel nicht schwer zu finden ist. Wenn die Lage der Ebene gegen den Horizont gegeben ist, so findet man daraus ihre Lage gegen die Mittagsfläche durch die Auflösung eines sphärischen rechtwinklichten Dreyecks ABD, worin AB ein

Bogen des Meridians, AD des Horizonts, BD der Ebene, ADB ihr Winkel mit dem Horizont, und AD das Maaß des Winkels ist, welchen ihr Durchschnitt mit dem Horizont OD und die Mittagslinie AO machen. In diesem ergibt sich aus D und AD der Winkel ABD und der Bogen AB, oder PBD und PB.

Wenn CP der Entfernung der Sonne vom Pole gleich ist, so fängt die Ebene an auf ihrer Seite nach dem Pole zu beschienen zu werden, in dem Falle, daß für einen vom Meridian entferntern Stundenkreis der Bogen wie CP kleiner als das Complement der Declination gewesen ist, und für einen nähern grösser wird. Im gegenseitigen Falle hört sie auf beschienen zu werden. Für eine jede Declination der Sonne kan man die Zeit finden, da eine gegebene Seite der Ebene von der Sonne beschienen zu werden anfängt oder aufhört, weil in dem Dreyeck BCP aus BP, B und CP als dem Complement der Declination der Stundenwinkel P nach (XXIV. n. 5. Kap. VI.) gefunden wird, um welchen die Sonne über oder unter die Ebene tritt. Da aber, wenn man von P auf BC ein Perpendikel fällt, auf beiden Seiten desselben ein Bogen CP von gegebener Länge gelegt werden kan, so tritt hier in Ansehung des Winkels P eine Zweydeutigkeit ein, die aber der Natur der Sache gemäß ist. Denn es sind zwey Stundenwinkel, die man sucht, einen, für welchen die Sonne über die Ebene tritt, den andern, da sie sie verläßt. Welcher von ihnen die Summe oder der Unterschied der Winkel an dem Perpendikel

pendikel sey, dis muß die Betrachtung der Umstände eines jeden einzelnen Falles entscheiden.

III.

Bey geometrischen Messungen müssen die Schenkel der gemessenen Winkel horizontal seyn. Wenn sie aber nicht horizontal haben können genommen werden, so haben die Winkel einer Reduction auf den Horizont nöthig. Es bedeute (Fig. 23.) AEQ den Horizont, APQ, EP Vertikalkreise, P das Zenith, BOC einen Winkel, der ausser der Horizontalfläche gemessen ist, so ist der Winkel der Vertikalkreise AP, EP, welche durch seine beiden Schenkel gehen, nemlich AOE oder P der auf den Horizont reducirte Winkel. Um diesen zu erfahren, muß man in dem sphärischen Dreyeck PBC ausser dem Bogen BC, dem Maasse des gemessenen Winkels BOC, die Bogen EP, CP, die Maassen der Winkel wissen, welche die Schenkel BO, CO, mit der Vertikallinie machen. Diese müssen durch eine besondere Messung gesucht werden. Alsdenn ist durch die drey Seiten der Winkel P gegeben, entweder nach (145) oder (160) oder (161). Es sey der gemessene Winkel BOC = a, der Winkel BOP = c, COP = b, so ist

$$176)\ \text{cos. P} = \text{cos. ang. red.} = \frac{\text{cos. a} - \text{cos. b. cos. c}}{\text{sin. b. sin. c}}$$

oder

$$\text{sin.} \tfrac{1}{2}\text{P} = \sqrt{\left(\frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{a} + \text{b} - \text{c}).\ \text{sin.} \frac{1}{2}(\text{a} + \text{c} - \text{b})}{\text{sin. b. sin. c}}\right)}$$

oder

oder

$$\cos.\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\left(\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b+c+a).\ \sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b.\ \sin. c}\right)}$$

Weil hier die Betrachtung des Entgegengesezten wegfällt, so findet auch kein zweifaches Zeichen vor der Wurzelgrösse statt.

Exempel. Es sey $a = 25°$, $b = 84°$, $c = 86°$, so ist nach der erstern Formel

l. sin. 84°	= 9,9976143
l. sin. 86°	= 9,9989408
l. sn. 84°. sn. 86°	= 9,9965551
l. cos. 25°	= 9,9572757
	9,9607206 = l. 0,913525
l. cos. 84°	= 9,0192346
l. cos. 86°	= 8,8435845
	7,8628191
subtr.	9,9965551
	7,8662640 = l. 0,007350
cos. P =	0,906175

$P = 25°\ 1'\ 5''$ —

Nach der zweyten Formel ist die Rechnung bequemer. Es ist $c - b = 2°$; $a + b - c = 23°$, $a + c - b = 27°$, also

l. sin.

l. sin. 11° 30′ = 9,2996553
l. sin. 13° 30′ = 9,3681853

8,6678406
l.sin.84°.sin.86° = 9,9965551

2) 8,6712855

9,3356427 = l.sn.12° 30′ 32″ +

P = 25° 1′ 4″ +

Aus diesem Exempel sieht man zugleich, wie viel der Fehler betragen würde, wenn man beym Messen statt horizontal zu visiren, um 4 und 6 Grad abgewichen wäre.

IV.

Aufg. Die Declination, Rectascension, Länge und Breite eines Gestirns mit einander zu vergleichen.

Aufl. Es sey (Fig. 24.) AQ der Aequator, APQ der Colurus des Sonnenstillstandes, PC der Nachtgleiche, P der Pol des Aequators, E der Pol der Ekliptik, welche durch CB geht. S ist ein Gestirn, dessen Declination SD, ihr Complement PS; die Rectascension CD, oder der Winkel CPD; die Breite SL, ihr Complement ES; die Länge CL oder der Winkel CEL der beiden Breitenkreise durch den Punkt C der Frühlingsnachtgleiche und das Gestirn gezogen. Die Schiefe der Ekliptik, welche als bekannt angenommen wird, isi der Bogen BQ oder EP.

In

In dem Dreyeck EPS, welches der Colurus, der Declinations- und Breitenkreis mit einander machen, ist also EP die Schiefe der Ekliptik, PS das Complement der Declination, ES dasselbe der Breite, der Winkel EPS = 90° + die Rectascension, PES = 90° — die Länge. ESP ist der Positionswinkel. Nun seyn erstlich EP, PS, EPS gegeben, so findet man dadurch den Winkel PES nach (149), wenn man daselbst

für A, B, a, c
hier PES, EPS, PS, EP

schreibt, und es ist

$$\text{cot. PES} = \frac{\text{sin. EP. cot. PS}}{\text{sin. EPS}} - \text{cos. EP. cot. EPS}$$

Weiter ist nach (146), wenn man daselbst

für a, b, c, A
sezt ES, PS, EP, EPS

$$\text{cos. ES} = \text{cos. PS. cos. EP} + \text{sin. PS. sin. EP. cs. EPS}$$

Man verwechsele in diesen Formeln die Buchstaben E und P, so erhält man

$$\text{cot. EPS} = \frac{\text{sin. EP. cot. ES}}{\text{sin. PES}} - \text{cos. EP. cot. PES}$$

nnd $\text{cs. PS} = \text{cs. ES. cs. EP.} + \text{sn. ES. sn. EP. cs. PES}$
oder den Winkel EPS, und die Seite PS aus den gegebenen Stücken ES, EP, PES

Man nenne die Rectascension = A = EPS — 90°
die Declination = D = 90° — PS
die Länge = L = 90° — PES

Die

die Breite $= B = 90° - ES$

die Schiefe der Eklipt. $= E = EP$,

so hat man für diese Grössen folgende Gleichungen

177) $\text{tang.} L = \frac{\text{sin.}E.\ \text{tang.}D}{\text{cos.}A} + \text{cos.}E.\ \text{tang.}A$

178) $\text{sin.}B = \text{sin.}D.\ \text{cos.}E - \text{cos.}D.\ \text{sin.}E.\ \text{sin.}A.$

179) $\text{tang.}A = \text{cos.}E.\ \text{tang.}L - \frac{\text{sin.}E.\ \text{tang.}B}{\text{cos.}L}$

180) $\text{sin.}D = \text{cos.}E.\ \text{sin.}B + \text{sin.}E.\ \text{cos.}B.\ \text{sin.}L$

Wenn man den Bogen CS ziehet, so ist (135)

$\text{cos.}CS = \text{cos.}CL.\ \text{cos.}SL$ und

$\text{cos.}CS = \text{cos.}CD.\ \text{cos.}SD$, also

181) $\text{cos.}L.\ \text{cos.}B = \text{cos.}A.\ \text{cos.}D$

Diese Formel dient, aus dreyen von den vier Stücken, Länge, Breite, Rectascension und Declination das vierte durch eine einzige Analogie zu finden.

Bey diesen Formeln muß in Acht genommen werden, daß die Bogen oder Winkel alle unter einem Quadranten, und, was die Breite und Declination anlangt, nördlich oder nach dem Pole P zu genommen sind. Wenn die Länge und Rectascension über einen Quadranten groß sind, so muß man die Zeichen ihrer trigonometrischen Fuuctionen gehörig ändern. Wenn die Declination südlich ist, so wird $\text{cot.}PS = \text{cot.}(90° + D) = -\text{tang.}D$ (8), $\text{cos.}PS = \text{cos.}(90° + D) = -\text{sin.}D$ und $\text{sin.}PS = \text{sin.}(90° + D) = + \text{cos.}D.$

Man

Man muß also in den Formeln für die Länge und Breite die Tangente und den Sinus einer südlichen oder einer entgegengesezten Declination negativ nehmen, oder diese Declination als negativ betrachten, wodurch ihr Sinus und ihre Tangente es auch werden. Der cos. D bleibt unverändert, weil entgegengesezte Bogen einerley Cosinus haben. Ein gleiches gilt von den Formeln für die Rectascension und Declination, worin eine südliche Breite wie ein negativer Bogen anzusehen. Ein negativer Wehrt für sin. B oder sin. D in (178, 180.) zeigt also eine entgegengesezte Breite oder Declination an, als in der Rechnung angenommen ist.

Exempel. Es sey die Rectascension, A = 128°
die Declination südl. D = 15°
E = 23° 28′ 16″

l. sin. E = 9,6001957
l. tg. D = 9,4280525 −

9,0282482
l. cos. A = 9,7893420 −

9,2389062 = l. + 0,17334 −

l. cos. E = 9,9624930
l. tg. A = 10,1071902 −

0,0696832 = l. − 1,17404

tang. L = − 1,00070
L = 180° − (45° 1′ +) = 134° 59′ −

l. sin. D = 9,4125962
l. cos. E = 9,9624930
——————
9,3754892 = l. — 0,23740
l. cos. D = 9,9849438
l. sin. E = 9,6001957
l. sin. A = 9,8965321
——————
9,4816716 = l. — 0,30316
——————
sin. B = — 0,54056
B = 32° 43′ + südlich.

V.

Aufg. Die Höhe, die Declination und das Azimuth eines Gestirns mit der Polhöhe eines Ortes und dem Stundenwinkel zu vergleichen.

Aufl. Es sey HR der Horizont, HZR der Meridian eines Ortes, dessen Zenith in Z. (Fig. 25.) Der nächste Pol sey P, ein Gestirn in S, dessen Höhe SO, Entfernung vom Zenith SZ, Complement der Declination SP, Azimuth der Winkel PZS des Meridians mit dem Vertikalkreise ZS. Man schreibe in (146)

für a, b, c, A
hier ZS, ZP, SP, ZPS oder P

so ist cos. ZS = cs. ZP . cs. SP + sin. ZP . sin. SP . cs. P oder, wenn man die Höhe des Gestirns H, die Declination D, die Polhöhe A, den Stundenwinkel S nennet,

182) $\sin. H = \sin. A. \sin. D \mp \cos. A. \cos. D. \cos. S$

Hieraus folgt

183) $\cos. S = \frac{\sin. H}{\cos. A. \cos. D} - \text{tang } A. \text{tang}. D$

Wenn ZS ein Quadrant ist, so ist das Gestirn im Horizont, und ZPS ist sein halber Tagebogen. Alsdenn ist sin. H = o, und es ist

184) $\cos. \text{arc. semid.} = - \text{tang. alt. pol.} \times \text{tg. decl.}$

Das Zeichen — bedeutet, daß der halbe Tagebogen stumpf ist, wenn die Declination positiv, oder P für den Nordpol genommen, nördlich ist. Ist die Declination negativ, oder südlich, so ist ihre Tangente verneint, und der Cosinus des halben Tagebogens bejaht, er selbst spitz.

Das Azimuth zu finden, verwechsele man in der Formel für das Dreyeck ZPS die Buchstaben Z, P, so ist $\cos. SP = \cos ZP. \cos. ZS \mp \sin. ZP. \sin. ZS. \cos. Z$, und $\cos. Z = \frac{\cos. SP}{\sin. ZP. \sin. ZS} - \cot. ZP. \cot. ZS$, oder, wenn man die vorigen Benennungen braucht, und den Winkel des Azimuths Z nennt,

185) $\cos. Z = \frac{\sin. D}{\cos. A. \cos. H} - \text{tang}. A. \text{tang}. H$

Wenn das Gestirn im Horizont ist, oder wenn H = o, so ist

186) $\cos. Z = \frac{\sin. D}{\cos. A}$

Man kan auch den Stundenwinkel oder das Azimuth noch bequemer nach (160) finden. Man

setze cH, cA, cD für die Complemente der Bogen H, A, D zum Quadranten, so ist

$$187) \text{sn.} \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{\text{sn.} \tfrac{1}{2}(cH + cA - cD) . \text{sn.} \tfrac{1}{2}(cH - cA + cD)}{\text{cos. } A . \text{ cos. } D}}$$

Für das Azimuth gilt dieselbe Formel, H und D verwechselt.

VI.

Aufg. Aus der Lage der Dachfläche und der Walmenseite gegen den Boden des Daches den Winkel zu finden, welchen sie mit einander machen.

Aufl. Es sey (Fig. 17.) AOB die Fläche des Bodens von dem Dache, AOC die Dachfläche, BOC die Fläche der Walmenseite, AOB der Winkel ihrer Durchschnittslinien mit der Fläche des Bodens, dessen Maaß AB ist, so wird aus den Winkeln A, B und dem Bogen AB der Winkel C gesucht. Man verwechsele in der Gleichung (147) die Buchstaben A, C, und schreibe AB für a, so ist $\text{cos. } C = \text{cos. } AB . \text{ sin. } B . \text{ sin. } A - \text{cos. } B . \text{ cos. } A$.

Wenn das Haus rechtwinklicht ist, so ist AOB oder $AB = 90°$, folglich $\text{cos. } AB = 0$, und $\text{cos. } C = - \text{cos. } B . \text{ cos. } A$, oder der Cosinus des Winkels der beyden Dachflächen ist gleich dem Producte aus den Cosinus ihrer Winkel mit dem Boden des Daches, welcher Winkel aber stumpf zu nehmen ist.

Exempel. Es seyn beyde Winkel A und B $= 45°$, so ist $\text{cos. } A = \text{cos. } B = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und daher

her cos. C = — ½. Weil nun sin. 30° = ½, und cos. 60° = sin. 30°, so ist cos. C = — cos. 60° und C = 180° — 60° = 120°.

Der Winkel COB, welchen die Durchschnittslinie beider Dachflächen CO mit einer der Seiten des Daches OB macht, wird aus (150) gefunden. Man schreibe daselbst AB für c, BC für a, welcher Bogen das Maas des Winkels COB ist, so erhält man

$$\text{cot. CB} = \frac{\text{sin. B. cot. A}}{\text{sin. AB}} - + \text{cos. B. cot. AB}$$

Wenn AB = 90°; so ist sin. AB = 1, cot. AB = 0 und cot. CB = sin. B. cot. A. Für A = 45° ist cot. CB = sin. B, und wenn auch B = 45°, so ist cot. CB = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, und CB = 54° 44′ +.

Achtes Kapitel.

Differentialformeln, die Veränderungen der Seiten und Winkel in ebenen und sphärischen Dreyecken auszudrücken.

I.

Es ist bey Beobachtungen und Messungen nicht möglich, die Grössen so genau zu erhalten, daß nicht oft ein Fehler, er rühre nun von einem Versehen des Beobachters oder von dem Instrumente her, einschleichen sollte. Dieser Fehler

wird auf die Grössen, die aus den gemessenen durch Rechnung hergeleitet werden, einen Einflus haben. Diesen Einflus muß man bestimmen können, theils, um dadurch die Fehler, welche man an dem Instrumente bemerkt hat, zu verbessern, und die Resultate der Rechnungen davon zu befreyen, theils auch die Grenzen sich angeben zu können, zwischen welchen die richtige Bestimmung der zu suchenden Grössen liegt, wenn man die Grenzen weiß, zwischen welchen die nicht zu vermeidenden Fehler beym Beobachten sich einschliessen lassen.

Ferner, eine Grösse wird gewöhnlich bis auf etwas weniges zu viel oder zu wenig durch einige Grössen bestimt, von welchen sie hauptsächlich abhängt. Es kommen aber denn noch andere Grössen hinzu, deren Einfluß auf jene zwar geringe ist, aber doch zu ihrer genauen Bestimmung mit in Rechnung gezogen werden muß. Gewöhnlich kan man die Grösse dieses Einflusses nicht bestimmen, wenn man nicht vorher die Grössen, welche davon leiden, wenigstens beynahe weiß. Es ist daher nicht nur unbequem, sondern auch oft so gut wie unmöglich, alle Nebenumstände mit in die Rechnung zu bringen; man muß also die Rechnung, wenn sie für die Hauptgrössen gemacht ist, durch den Einfluß der Nebengrössen verbessern. Dis kan man, ohne die Rechnung von neuen anzufangen, bewerkstelligen, wenn man sucht, was für Veränderung das Resultat der Rechnung leidet, wenn eine oder mehrere Grössen verändert werden, unterdessen

daß

daß die übrigen dieselben bleiben. Wenn man z. E. für eine gewisse Zeit die Höhe eines Gestirns sucht, so muß man sie erst so suchen, wie sie ohne Strahlenbrechung und Parallaxe seyn würde, weil dieser ihre Würkung von der Höhe des Gestirns abhängt. Nachher muß diese gefundene Höhe durch die ihr zugehörige Refraction und Parallaxe verbessert werden.

Die zu diesem Zwecke nöthige Formeln zu finden, muß man wissen, wie in einem Dreyeck, worin einige Stücke unveränderlich, andere veränderlich angenommen werden, die Veränderungen einiger Theile sich zu denen der übrigen verhalten. Weil wir aber voraussetzen, daß die Veränderungen in Ansehung des Ganzen geringe sind, und also ihr Einfluß auch gering seyn wird, so können wir uns mit den lezten Verhältnissen begnügen, welche diese Veränderungen unter einander haben, wenn sie ohne Ende klein genommen werden, welchen sich die wahren Verhältnisse immer mehr und mehr nähern, je kleiner die Veränderungen sind.

Hier sind nur vier Fälle möglich. Erstlich sind eine Seite und der anliegende Winkel, zweytens eine Seite und der gegenüberstehende Winkel, drittens zwey Seiten und viertens zwey Winkel in einem Dreyeck unveränderlich, und die übrigen Stücke verändern sich durch die Veränderung des einen unter ihnen mit einander. Man sucht das lezte Verhältnis der Veränderungen je zweyer.

11.

Man muß bey dieser Rechnung folgende Formeln aus der Differential-Rechnung wohl inne haben:

$$d.xy = ydx + xdy$$

$$d.\sin.A = \cos.A.\ dA$$

$$d.\cos.A = -\sin.A.\ dA.$$

In diesen Formeln sind die lezten Verhältnisse der Veränderungen, welche durch die Grössen selbst mit vorgeschriebenem d bezeichnet werden, durch die Verhältnisse endlicher Grössen ausgedrückt. Diese Gleichungen sind nemlich ursprünglich Analogien. So ist die erstere eigentlich so zu lesen:

$$dx : d.xy = 1 : y + \frac{xdy}{dx}$$

$$\text{oder } dy : d.xy = 1 : \frac{ydx}{dy} + x,$$

nemlich das lezte Verhältniß zwischen der Veränderung eines Factors x und der eines Products xy ist gleich dem Verhältnis von 1 zu der Summe des andern Factors y und des Products aus dem erstern x, in den Exponenten des lezten Verhältnisses zwischen den Veränderungen der beyden Factoren $\frac{dy}{dx}$. Dieser Exponent kan sehr wohl endlich seyn, wenn gleich die Glieder des Verhältnisses als ohne Ende klein betrachtet werden. So heist die zweyte Gleichung eigentlich, das lezte Verhältnis der Veränderungen des Bo-

gens

gens und seines Sinus ist gleich dem der Einheit zum Cosinus desselben; und die dritte: das lezte Verhältnis der Veränderungen des Bogens und seines Cosinus ist gleich dem der Einheit zum Sinus desselben. Das Zeichen — bedeutet, daß die Veränderungen einander entgegengesezt sind. Der positive Cosinus nimt ab, wenn der Bogen wächst; sein Wachsthum ist eine negative Grösse. Eines negativen Cosinus Wachsthum ist ebenfalls negativ, wenn dasselbe des Bogens positiv ist.

III.

In dem geradlinichten Dreyeck ACB (Fig. 26.) seyn AC und der anliegende Winkel A unveränderlich. Man sucht die lezten Verhältnisse der Veränderungen seiner übrigen Seiten und Winkel, wenn es sich in ein anderes ACD verwandelt.

Man bezeichne hier und im folgendem die Winkel durch die beygeschriebenen Buchstaben, A, B, C, die gegenüberstehenden Seiten durch a, b, c, so ist

188) $da : -dB = a : \text{tang.}B$.

189) $da : dC = a : \text{tang.}B$

190) $dc : da = 1 : \text{cos.}B$

191) $dc : dC = a : \text{sin.}B$

Denn man setze in der Gleichung für das Dreyeck, $b\,\text{sin.}A = a\,\text{sin.}B$ (13), b und sin.A unveränderlich, so ist nach den Regeln der Differentialrechnung (II) $o = da.\,\text{sin.}B + dB.\,\text{cos.}B.\,a$; oder $o = da.\,\text{tang.}B + dB.\,a$; oder $-dB.\,a = da.\,\text{tang.}B$. welches die Analogie (188) gibt. Das

Zeichen — bedeutet, daß B abnimt, wenn a = BC wächst, wie es die Betrachtung der Figur zeigt, im Fall daß B spitz ist. Wenn B stumpf ist, so wachsen B und a zusammen, alsdenn ist aber auch tang. B negativ, weswegen man diese Tangente nebst dB positiv nehmen kan.

Weil die Summe B + C unveränderlich ist, so ist dC = — dB, welches (189) gibt.

Die Formel c. sin. A = a. sin. C differentiirt, wird dc. sin. A = da. sin. C + dC. cos. C. a = da. sin. C + da. tang. B. cos. C = da (sin. C. cs. B + sin. B. cos. C) : cos. B = da. sin. (B + C) : cos. B = da. sin. A : cos. B; also dc. cos. B = da, zufolge den Formeln (13. 189. 3. 25). Hieraus erhält man die Analogie (190) und aus dieser mit der (189) verbunden, die (191), in welcher man auch — dB statt dC setzen kan.

IV.

In dem geradlinichten Dreyeck ABC (Fig. 27) seyn A und die gegenüberstehende Seite BC unveränderlich. Man sucht die lezten Verhältnisse der Veränderungen seiner übrigen Seiten und Winkel, wenn es sich in das ADE verändert.

Eben die Bezeichnung, wie vorher gebraucht, ist

192) $db : dB = b : \text{tang.}B$

193) $dc : dC = c : \text{tang.}C$

194) $db : -dc = \text{cos.}B : \text{cos.}C$

Nem-

Nemlich b. sin.A = a. sin.B differentiirt, so daß A und a unveränderlich sind, gibt db. sin.A = dB. cos.B. a oder db. sin.B = dB. cos.B. b, wenn man statt sin.A und a durch die ihnen proportionalen sin. B und b multiplicirt, das ist db. tang.B = dB. b. Hieraus fließt die Analogie (192) und, wenn man B und C, b und c verwechselt, auch (193). Ferner weil dB = —dC, so folgt aus den beiden gefundenen Analogien

$$db : -dc = b.\ \text{tang}.C : c.\ \text{tang}.B = \frac{b.\ \text{sin}.C}{\text{cos}.C} : \frac{c.\ \text{sin}.B}{\text{cos}.B} = \frac{1}{\text{cos}.C} : \frac{1}{\text{cos}.B} = \text{cos}.B : \text{cos}.C.$$

Die Veränderungen der Seiten sind entgegengesezt, wenn B und C beyde spitz sind, wie die Betrachtung der Figur leicht zeiget. Wenn einer dieser Winkel stumpf wird, so wird cos.B oder cos.C negativ, und man kan dc nebst ihm positiv setzen.

V.

In dem geradlinichten Dreyeck (Fig. 28) seyn die Seiten AB, AC unveränderlich. Man sucht die lezten Verhältnisse der Veränderungen seiner Winkel und der dritten Seite, wenn es sich in das ACD verändert.

Diese sind

195) $dC : dB = \text{tang}.C : \text{tang}.B$

196) $dC : -dA = \text{sin}.C.\text{cos}.B : \text{sin}.A = c.\text{cos}.B : a$

197) $dB : -dA = \text{sin}.B.\text{cos}.C : \text{sin}.A = b.\text{cos}.C : a$

198) $dA : da = 1 : b.\text{sin}.C = 1 : c.\ \text{sin}.B$

199) $dB : -da = 1 : a.\ \text{tang}.C.$

Man

Man differentiire die Gleichung b.sin.C = c.sin.B so, daß b, c unveränderlich seyn, so erhält man b.cos.C. dC = c. cos.B. dB oder sin.B. cos.C. dC = sin.C. cs.B. dB, das ist tg.B dC = tg.C.dB, woraus (195) fließt. Wenn beide Winkel B, C spitz sind, so sind ihre Veränderungen gleichnahmig; das Gegentheil erfolgt, wenn einer stumpf ist. Weil A + B + C = 2R so ist dA + dB + dC = o und dB = — dA — dC. Diesen Wehrt von dB setze man in der Differentialformel sin.B. cos.C. dC = sin.C. cs.B. dB, so wird sie, sin.B. cos.C. dC = — sin. C. cos.B (dA + dC) oder dC (sin. B. cos. C + sin. C. cos. B) = — sin.C. cos.B. dA das ist dC. sin. (B + C) = dC sin.A = — sin.C. cos.B. dA

Diese Gleichung enthält die Analogie (196). Man kan auch statt der Factoren sin.C, sin.A in den beiden Gliedern des Verhältnisses die ihnen proportionalen c, a, setzen.

Die Analogie (197) ist mit der (196) einerley. Es sind nur B und C, b und c, die gleichgültigen Stücke in dem Dreyecke mit einander verwechselt.

Die Formel b. sin A = a. sin B eben so differentiirt gibt b. cos.A. dA = sin B. da + a. cs.B.dB oder, wenn man für a. dB aus (197) seinen Wehrt sezt, sin.B. da = dA (b. cos.A + b. cos. C. cs.B) = dA. b. sin. B. sin. C. Denn es ist cos. A = — cos. (B + C) = — cos.B. cs.C + sin.B. sin.C (27) oder cos.A + cos.B. cos.C = sin.B. sin.C. Hieraus folgt die Analogie (198) und aus derselben mit (197) verglichen, die (199).

VI.

VI.

Wenn zwey Winkel unverändert bleiben, so bleibt es der dritte auch, und die Dreyecke werden ähnlich, deren Eigenschaften bekannt sind.

VII.

In dem sphärischen Dreyeck ABC (Fig. 26) seyn AC = b und der anliegende Winkel A unveränderlich. Man sucht die lezten Verhältnisse der Veränderungen seiner Seiten und Winkel, wenn es sich in ein andres ACD verwandelt.

Diese Verhältnisse sind, nach der schon gebrauchten Bezeichnung

200) $da : -dB = \text{tang.}\,a : \text{tang.}\,B$

201) $dC : -dB = 1 : \text{cos.}\,a$

202) $dc : da = 1 : \text{cos.}\,B$

203) $da : dC = \text{sin.}\,a : \text{tang.}\,B$

204) $dc : -dB = \text{tang.}\,a : \text{sin.}\,B$

205) $dc : dC = \text{sin.}\,a : \text{sin.}\,B$

Denn die Gleichung $\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,A = \text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,B$ differentiirt, so daß b und A unveränderlich gesezt werden, gibt $0 = da.\,\text{cos.}\,a.\,\text{sin.}\,B + dB\,\text{cos.}\,B.\,\text{sin.}\,a$ oder $-dB.\,\text{tang.}\,a = da.\,\text{tang.}\,B$

Man verwechsele in der Gleichung (147) A und B, a und b miteinander, so wird sie, $\text{cos.}\,B = \text{cos.}\,b.\,\text{sin.}\,A.\,\text{sin.}\,C - \text{cos.}\,A.\,\text{cos.}\,C$, diese eben so differentiirt, gibt, $-dB.\,\text{sin.}\,B = dC.\,\text{cos.}\,C.\,\text{sin.}\,A.\,\text{cos.}\,b + dC.\,\text{sin.}\,C.\,\text{cos.}\,A = dC.\,\text{sin.}\,A\,(\text{cos.}\,C.\,\text{cos.}\,b + \text{sin.}\,C.\,\text{cot.}\,A) = dC.\,\text{sin.}\,A.$

$\text{sin. A.} \frac{\text{sin. b}}{\text{tang. a}}$. (150), wenn man daselbst B und C, b und c verwechselt. Folglich ist

$$-dB = dC. \frac{\text{sin. A. sin. b}}{\text{sin. B. tang. a}} = \frac{\text{sin. a}}{\text{tang. a}} dC = \text{cs. a. } dC$$

Eben so gibt die Gleichung (146), $\text{cs. a} = \text{cs. b. cs. c} + \text{sin. b. sin. c. cos. A}$ differentiirt, $-\text{da. sin. a} = -\text{dc. sin. c. cos. b} + \text{dc. cos. c. sin. b. cos. A} = -\text{dc. sin. b (sin. c. cot. b} - \text{cos. c. cos. A)}$

$= -\text{dc. sin. b.} \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. B}}$ (149) wenn man daselbst A und B, a und b verwechselt. Folglich ist

$$da = dc \frac{\text{sin. b. sin. A}}{\text{sin. a. tang. B}} = dc \frac{\text{sin. B}}{\text{tang. B}} = \text{dc. cos. B.}$$

Dis gibt die Analogie (202). Die übrigen fließen unmittelbar aus den drey gefundenen und auseinander.

VIII.

Eben dieses zu finden, wenn der Winkel A, und die gegenüberstehende Seite BC = a unveränderlich sind. (Fig. 27.)

Diese Verhältnisse sind

206) $dc : dC = \text{tang. c} : \text{tang. C}$
207) $db : dB = \text{tang. b} : \text{tang. B}$
208) $dC : -dB = \text{cos. c} : \text{cos. b}$
209) $dc : -dB = \text{sin. c} : \text{tang. C. cos. b}$

210)

210) $db : -dC = \sin. b : \tang. B. \cos. c$

211) $dc : -db = \cos. C : \cos. B$

Die Gleichung $\sin. c. \sin. A = \sin. a. \sin C$ differentiirt, A und a beständig gesezt, gibt $dc. \cos. c. \sin. A = dC. \cos. C. \sin. a$, oder $dc. \cos. c. \sin. C = dC. \cos. C. \sin. c$, oder $dc. \tang. C = dC. \tang. c$. woraus (206) folgt. Man verwechsele C und c mit B und b, so erhält man die ähnliche Analogie (207)

Die Formel (147) $\cos. A = \cos. a. \sin. B. \sin. C - \cos. B. \cos. C$ auf eben die Art differentiirt, wird $0 = \cos. a (dB. \cos. B. \sin. C + dC. \cos. C. \sin. B) + dB. \sin. B. \cos. C + dC. \sin. C. \cos. B$, oder, mit $\sin. C. \sin. B$ dividirt, und das Product in den Factor dB auf die andere Seite geschaft, $-dB (\cos. a. \cot. B + \cot. C) = dC (\cos. a. \cot. C + \cot. B)$, das ist nach (149), $-dB \frac{\sin. a. \cot. c}{\sin. B} = dC \frac{\sin. a. \cot. b}{\sin. C}$ oder $-dB. \cos. c : \sin. c. \sin. B = dC. \cos. b : \sin. b. \sin. C$. Die Divisores sind einander gleich; also ist $-dB. \cos. c = dC. \cos. b$, woraus (208) fließt. Die übrigen Analogien fliessen unmittelbar aus den drey gefundenen. Die lezte nur, welche aus (206 und 210.) fliesset, wird zuerst diese,

$$dc : -db = \sin. c. \tang. B : \tang. C. \sin. b = \frac{\sin. c. \sin. B}{\cos. B} : \frac{\sin. b. \sin. C}{\cos. C} = \cos. C : \cos. B,$$

weil die Zähler gleich sind.

IX.

Eben dieses zu finden, wenn zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks AC=b, und AB=c beständig sind. (Fig. 28.)

Die Verhältnisse sind

212) dB : dC = tang. B : tang. C

213) da : dA = sin. b. sin. C : 1 = sin. c. sin. B : 1

214) — dA : dB = sn. a : sn. b. cs. C = sn. A : sn. B. cs. C

215) — dA : dC = sn. a : sn. c. cs. B = sn. A : sn. C. cs. B

216) — da : dB = sin. a. tang. C : 1

217) — da : dC = sin. a. tang. B : 1

Die Gleichung sin. b. sin. C = sin. c. sin. B differentiirt, b und c unveränderlich gesezt, gibt dC. cos. C. sin. b = dB. cos. B. sin. c, oder dC. cos. C. sin. B = dB. cos. B. sin. C, das ist, dC. tang. B = dB. tang. C, welches die Analogie (212) ist.

Die Gleichung (146) cos. a = cos. b. cos. c + sin. b. sin. c. cos. A eben so differentiirt, wird, da. sin. a = dA. sin. A. sin. b. sin. c, oder da = dA. sin. b. sin. C = dA. sin. c. sin. B. Hierin liegt die Analogie (213).

Die Gleichung sin. a. sin. B = sin. b. sin. A eben so differentiirt, gibt da. cos. a. sin. B + dB. cos. B. sin. a = dA. cos. A. sin. b, oder dB. cs. B. sn. a = dA. sn. b. (cs. A — cs. a. sn. B. sn. C) = — dA. sn. b. cs. B. cs. C, (147) oder dB. sn. a = — dA. sin. b. cos. C. Dies wird die Analogie (214) Die (215) ist eben dieselbe, die gleichgültigen Seiten und Winkel verwechselt.

Die

Die übrigen entstehen aus der Zusammensetzung der gefundenen.

X.

Eben dieses zu finden, wenn zwey Winkel B und C beständig sind. (Fig. 29)

Die Verhältnisse sind,

218) db : dc = tang.b : tang.c

219) dA : da = sin.c. sin.B : 1 = sin.b. sin.C : 1

220) da : db = sn.A : sn.B.cs.c = sn.a : sn.b. cs.c

221) da : dc = sn.A : sn.C.cs.b = sn.a : sn.c.cs.b

222) dA : db = sin.A. tang.c : 1

223) dA ; dc = sin.A. tang.b : 1.

Die Beweise sind denen in (IX) ganz ähnlich. Die Gleichung sin.c. sin.B = sin.b.sin.C differentiirt gibt dc. cos.c. sin.B = db. cos.b. sin.C, oder dc. cos.c. sin.b = db. cos.b. sin.c, das ist dc. tang.b = db. tang.c, wie in (218).

Ferner folgt aus (147) differentiirt, dA. sin.A = da. sin.a. sin.B. sin.C, oder dA = da. sin.b. sin.C = da. sin.c. sin.B wie in (219).

Ferner folgt aus der Gleichung sin.b. sin.A = sn.a. sin.B die Differentialgleichung db. cos.b. sin.A + dA. cos.A. sin.b = da. cos.a. sin.B, oder db.cos.b.sin.A = da.sin.B(cos.a — sn.c.sn.b.cs.A) = da. sin.B. cos.b. cos.c. (146) oder db. sin.A = da. sin.B. cos.c, wie in (220).

Die übrigen Analogien folgen aus den gefundenen unmittelbar.

Alle hätten sogleich aus denen in (IX) hergeleitet werden können, wenn man daselbst für die Seiten und Winkel die Complemente der gegenüberste-

henden Winkel und Seiten schreibt, wodurch die Differentiale dieser verwechselten Seiten und Winkel entgegengesezt werden, wie es auch ihre Tangenten und Cosinus sind. Wenn aber alle oder zwey Grössen der Verhältnisse negativ sind, so kan man sie alle positiv nehmen.

XI.

Der Gebrauch dieser Differentialformeln ist vor andern in der Astronomie sehr häufig. Ein paar Beyspiele aus derselben sollen ihn erläutern.

Die Parallaxe eines Gestirns ist der Winkel, um welchen es von einem Ort auf der Erdfläche betrachtet niedriger erscheint, als wenn es von dem Mittelpunkt der Erde gesehen würde. Sie verringert die Höhe des Gestirns ohne den Vertikalkreis, worin es befindlich ist, zu ändern. Die Horizontalparallaxe ist der gedachte Winkel, wenn das Gestirn im Horizont erscheint. Die Parallaxe in einer jeden Entfernung vom Zenith ist diese Horizontalparallaxe durch den Sinus der scheinbaren Entfernung von Zenith multiplicirt.

Dis vorausgesezt, soll man aus der **Horizontalparallaxe eines Gestirns finden, welchen Einfluß die Parallaxe für eine gewisse Höhe auf die Declination und Rectascension habe.**

Es sey (Fig. 25) HZR der Meridian eines Ortes, dessen Zenith Z, Entfernung vom Pole ZP, an welchem ein Gestirn in s beobachtet werde, dessen wahrer Ort in S ist. Die scheinbare Declination desselben ist das Complement von Ps, ihr

ihr Unterschied von der wahren die Parallaxe der Declination. Der Winkel SPs ist der Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Rectascension oder die Parallaxe derselben. Die Dreyecke ZPS, ZPs haben die Seite ZP und den Winkel PZS gemein. Es ist demnach aus (205) d.Zs : d.ZPs = sin. sP : sin. ZsP = sin. sP : $\frac{\text{sin.ZPs. sin.ZP}}{\text{sin.Zs}}$. Man setze für d.Zs seinen Wehrt durch die Horizontalparallaxe ausgedrückt, nemlich par. hor. $\times$ sin.Zs, so ist

224) parall. asc. r. = (par. hor. $\times$ sin. dist. appar. a Mer. $\times$ cos. alt. pol.) : cos. decl. appar.

Ferner ist nach (202), d. Zs : d. Ps = 1 : cos.PsZ. Wenn man aber d. Ps oder die Parallaxe der Declination durch ZP, Ps, ZPs und die Horizontalparallaxe ausdrücken will, so schreibe man für cos.PsZ zuerst cot. PsZ. sin.PsZ = (cot.PsZ. sin. ZP. sin. ZPs) : sin. Zs, und da cot. PsZ = $\frac{\text{sin.Ps. cot.ZP}}{\text{sin.ZPs}}$ — cos. Ps. cot. ZPs (149); so wird cos. PsZ = (sin. Ps. cos. ZP — cos. Ps. cos. ZPs. sin.ZP) : sin.Zs. Man setze in dem Wehrte von d.Ps, der d.Zs. cos.PsZ ist, statt d.Zs seinen Wehrt durch die Horizontalparallaxe ausgedrückt, so ist

225) par. decl. = par. hor. (cos. decl. app. $\times$ sin. alt. pol. — sin. decl. app. $\times$ cos. dist. app. a Mer. $\times$ cos. alt. pol.).

Die Veränderungen in der Entfernung vom Zenith und der Rectascension, welche durch die Pa-

rallaxe geschehen, sind gleichnahmig, in dem Fall, daß in der Figur das Gestirn auf der Ostseite gesezt wird, daher die scheinbare Rectascension durch die Parallaxe grösser wird, als die wahre. Wenn aber das Gestirn auf der andern Seite befindlich ist, so wird die Entfernung vom Meridian negativ, ihr Sinus auch, und die Parallaxe macht die scheinbare Rectascension kleiner als die wahre.

Die Veränderungen in dem Complemente der Declination und der Entfernung vom Zenith sind gleichnahmig, so lange cos. PsZ positiv bleibt. Daher ist alsdenn die Parallaxe der wahren Declination negativ. Diese ist deswegen kleiner als die scheinbare, wenn sie nördlich (d. i. positiv), grösser, wenn sie negativ (d. i. südlich) ist. Der zweyte Theil in (225) wird addirt, wenn entweder die Declination südlich, oder die Entfernung vom Meridian grösser als 90 Grad ist.

Mehreres von den Parallaxen und ihrem Gebrauch findet man in den astronomischen Lehrbüchern, besonders in der Astronomie des Hrn. de la Lande, 9tem Buche.

XII.

Die Fortrückung der Nachtgleichen verursacht, daß die Längen der Sterne grösser werden, ohne daß ihre Breite sich änderte. Diese Fortrückung beträgt jährlich 50″$\frac{1}{3}$. **Man sucht aus der Veränderung in der Länge die daher entstehende Veränderung in der Declination und Rectascension.**

In dem Dreyeck EPS (Fig. 24.) dessen Theile (Kap. 7. IV.) benannt sind, bleibt durch die Präceßion EP und ES ungeändert. Der Winkel PES wird kleiner, weil CES grösser wird. Man setze in (IX) EP = c; ES = b, PS = a, und

E, P, S
für A, B, C

so ist nach (213)

dE : dPS = 1 : sin. EP. sin. P.

Die Differentialen des Winkels E und der Seite PS sind gleichnahmig und beide den Veränderungen jenes der Länge und dieses der Declination entgegengesezt, so lange sin. P positiv bleibt. Es ist demnach

226) praec. decl. = praec. long. × sin. obl. ecl. × cos. asc. rect.

Diese wird negativ, wenn die Rectascension zwischen 90 und 270 Grad fällt, d. i. wenn EPS über 180 ist.

Ferner ist in eben diesem Dreyeck nach (214) — dE : ∓ dP = sin. PS : sin. ES. cos. S. Um die Veränderung der Rectascension durch EP, PS, P auszudrücken, verfahre man wie in (XI).

Es ist nemlich sin. ES. cos. S = cot. S. sin. S. sin. ES

$= \text{cot. S. sin. EP. sin. P}$; und $\text{cot. S} = \dfrac{\text{sin. PS. cot. EP}}{\text{sin. P}}$

— cs. PS. cot. P (149), also sin. ES. cs. S = sin. PS. cos. EP — cos. PS. cos. P. sin. EP.

Daraus wird folglich — dE : ∓ dP = 1 : cos. EP — cot. PS. cos. P. sin. EP. Es ist aber dP oder die Veränderung des Winkels EPS mit

der Präceßion in der Rectascension gleichnahmig, so wie dE derselben in der Länge entgegengesezt ist; Ferner ist cot. PS = der Tangente der Declination, und — cſ.EPS = + cſ.BPS = + ſn.CPS = dem Sinus der Rectascension. Man erhält also *

227) praeceſſ. aſc. r. = praec. long. (coſ. obl. ecl. + tang. decl. × ſin. aſc. r. × ſin. obl. ecl.)

Die Veränderungen in den Zeichen der trigonometrischen Functionen müssen gehörig beobachtet werden. So wird z. E. wenn sonst nichts geändert wird, für die sechs lezten Zeichen der zweyte Theil der Gleichung abgezogen, weil der ſin.aſc.r. negativ wird.

Dergleichen Aufgaben, wie diese, kommen häufig vor. Sie enthalten im Grunde nichts als die berechneten Formeln mit benannten Grössen.

XIII.

In den vorhergehenden Lehrsätzen und Aufgaben ward eine Grösse durch die andere zwar nicht völlig genau, aber doch auf eine bequeme und hinlängliche Art durch Näherung ausgedrückt. Man bedient sich der approximirten Ausdrücke häufig, wenn unter den gegebenen Grössen, wovon die gesuchte abhängt, so kleine vorkommen, daß man ihre Quadrate oder die höhern Potenzen wegwerfen kan, oder wenn dergleichen sich in die Rechnung hineinbringen lassen. Ein paar Bey-

* Einen weitläuftigen und verwirrten Beweis dieser Formel findet man in der Astronomie des Hrn. de la Lande §. 2162-2167.

Beyspiele sollen Anleitung geben, wie man bey trigonometrischen Fragen sich hiebey helfen könne.

Es soll der Unterschied zwischen der Hypotenuse BC eines rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 16.) und der Kathete AB gefunden werden, vorausgesezt, daß der Winkel B ziemlich klein sey, etwa unter 8 Grad, wie die Winkel der Planetenbahnen mit der Ekliptik.

Es sey BC = a; AB = c, so ist 1 : tang. a = cos. B : tang. c (134) also tang. c = tang. a. cos. B. Man setze cos. B = 1 — v, so daß v den Sinus versus von B bedeute, welche Substitution zu dem Ende geschicht, daß man eine kleine Grösse in die Rechnung hineinbringe, da der Sinus versus dem Quadrat des Sinus durch 1 + cos. B dividirt gleich ist. Man setze auch noch der Kürze wegen tang. a = t, daß tang. c = t (1 — v). Nun ist nach (36)

$$\text{tang.}\,(a - c) = \frac{t - t\,(1 - v)}{1 + tt\,(1 - v)} = \frac{tv}{1 + tt - ttv} = \frac{tv : (1 + tt)}{1 - ttv : (1 + tt)}.$$

Es ist aber sin. a : $\sqrt{}$ (1 — sin. a^2) = tang. a = t, woraus sin. a^2 = tt (1 — sin. a^2) und sin. a = t : $\sqrt{}$ (1 + tt) folget, daher auch cos. a = 1 : $\sqrt{}$ (1 + tt) ist. Man erhält also

$$\text{tang.}\,(a - c) = \frac{v.\,\text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,a}{1 - v.\,\text{sin.}\,a^2} =$$

 v. sin.

$v.\ \sin.\ a.\ \cos.\ a\ (1 + v.\ \sin.\ a^2)$, wenn man die Division würklich verrichtet, und die höhern Potenzen von v wegläßt. Weil $\sin.\ a.\ \cos.\ a = \frac{1}{2}\sin.\ 2a$ (29) und $\sin.\ a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.\ 2a$ (32) und ferner der Unterschied der Bogen a, c der Voraussetzung zu folge klein, die Tangente also dem Bogen fast gleich ist, so wird $v.\ \sin.\ a.\ \cos.\ a\ (1 + v.\ \sin.\ a^2) = \frac{1}{2}v.\ \sin.\ 2a\ (1 + \frac{1}{2}v. - \frac{1}{2}v.\ \cos.\ 2a) = \frac{1}{2}v.\ \sin.\ 2a + \frac{1}{4}vv.\ \sin.\ 2a - \frac{1}{8}vv.\ \sin.\ 4a = a - c$ nächstens. Man kan auch, wenn v klein genug ist, $\frac{1}{2}v.\ \sin.\ 2a = a - c$ setzen. Der Unterschied der Hypotenuse und der Kathete, welchen man so erhält, ist in Theilen des Halbmessers, Eins, zu nehmen.

Diese Formel wird in der Astronomie zur Reduction der Planeten auf die Ekliptik bequem gebraucht. Die gröste Reduction ist $\frac{1}{2}v$, wenn $\sin\ 2a = 1$, oder wenn der Planet 45° von den Knoten entfernt ist.

XIV.

Man soll bey eben diesen Voraussetzungen den cos. AC, der B gegenüberstehenden Seite b durch Näherung ausdrücken.

Aufl. Es ist $1 : \sin.\ a = \sin.\ B : \sin.\ b$, also $\sin.\ b^2 = \sin.\ a^2.\ \sin.\ B^2$; und $\cos.\ b^2 = 1 - \sin.\ a^2.\ \sin\ B^2$. Man setze wiederum $1 - v = \cos.\ B$, so ist $1 - 2v + vv = \cos.\ B^2$ und $2v - vv = \sin.\ B^2$; daher $\cos.\ b^2 = 1 - \sin.\ a^2\ (2v - vv)$. Durch die Ausziehung der Qua-

Quadratwurzel erhält man, $\cos. b = 1 - \frac{1}{2}\sin.a^2 (2v - vv) + \frac{1.(1-2)}{1.2.4}.\sin.a^4 (2v - vv)^2 - \text{etc.}$ das ist, wenn man die höhern Potenzen von v über das Quadrat wegläßt, $\cos. b = 1 - v.\sin.a^2 + \frac{1}{2} vv.\sin.a^2 - \frac{1}{2} vv.\sin.a^4$. Man setze für $\sin.a^2$ seinen Wehrt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.2a$, und $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos.2a + \frac{1}{8}\cos.4a$ für $\sin.a^4$ nach (105), so erhält man

$$\cos. b = 1 - \frac{1}{2}v + \frac{1}{16}vv + \frac{1}{2}v.\cos.2a - \frac{1}{16}vv.\cos.4a.$$

Bey der Berechnung der Bewegung des Mondes wird dieser Satz gebraucht. S. Clairaut théorie de la lune p. 39.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Anhang

Anhang.

Erweis des binomischen und polynomischen Lehrsatzes für jede Gattung von Exponenten.

I.

Wenn eine zweytheilichte Grösse a + b auf eine Potenz vom Grade n erhoben werden soll, und n eine ganze bejahte Zahl ist, so ist es nicht schwer zu erweisen, daß

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \; - \; - \; (n-r+1)}{1.2.3 \; - \; - \; - \; - \; - \; r} a^{n-r} b^r + \text{etc.}$$

Man findet von diesem wichtigen Lehrsatze zwey schöne Beweise, einen in des Herrn von Segner Cursu mathem. P. II. §. 248; den andern in des Herrn Hofr. Kästner Analysis endl. Gr. §. 116. ff.

Der Lehrsatz gilt aber auch, und da ist sein vorzüglicher Gebrauch, wenn n eine verneinte

ganze

ganze Zahl, oder eine gebrochene, sie sey verneint oder bejaht, oder eine Irrationalzahl jeder Art ist. Dis läßt sich aus der Form des Lehrsatzes für ganze Exponenten durch die Buchstabenrechnung zeigen. Wenn man $(a + b)^n$ entwickelt, und daraus die Wurzel vom Grade m zieht, so hat man die Formel für $(a + b)^{n:m}$. Wenn man die Einheit durch diese gefundene Wurzel dividiert, so hat man die Formel für $(a + b)^{-n:m}$. Diese Entwickelungen der gebrochnen und verneinten Potenzen lassen sich auf mehrerley Arten bewerkstelligen. S. von Segner a. a. O. §. 259 und 326. Clairauts Algebra S. 286 der deutschen Uebers. Aber diese Beweise kosten einem Anfänger Mühe, und endigen sich doch am Ende in eine Induction. Ein vollkommen allgemeiner und leichter Beweis ist durch die Differentialrechnung möglich. S. Kästners Anal. unendl. Gr. §. 46. Wenn man aber bey dem Gebrauch des binomischen Lehrsatzes in seiner Allgemeinheit die Differentialrechnung nicht voraussetzen will, wie es der Fall in dieser Schrift Kap. 4. XXXIV; 5. VIII. ist; oder wenn man ihn als ein Eigenthum der Analysis endlicher Grössen lieber ansehen wollte; so würde man doch suchen müssen, einen befriedigenden Beweis desselben auf seine Form für ganze bejahte Exponenten zu gründen, der auch das leisten müste, daß man dabey die Verwandtschaft der verschiedenen Formen des Lehrsatzes deutlich einsähe. Die Differentialrechnung kan manche Sätze, welche die Analysis endlicher Grössen mühsamer herausbringt, mit gros-

grosser Kürze und Leichtigkeit darthun. Aber sie führt diese Beweise so, daß man zu dem Satze gelangt, und nicht weis, wie. Ihre Lehrsätze von den lezten Verhältnissen sind so allgemein, daß man dadurch einen Sprung über einen weiten Raum thut, den man sonst Schritt für Schritt durchwandeln müste. Angenehm ist dis, wenn man diesen Raum so durchwandelt hat, und durch Hülfe der Rechnung des Unendlichen ihn hernach mit Riesenschritten mißt. Sonst aber scheint die anschauende Erkentnis, die der Mathematik wesentlich, und vor andern menschlichen Wissenschaften ausschliessungsweise zukömt, durch sie da zu leiden, wo es nicht eigentlich und nothwendig auf die Entwickelung der lezten Verhältnisse ankömt. Die Widersacher dieser Rechnung, da sie aufkam, welche es nicht aus Vorurtheil für das Alte, aus irrigen Begriffen oder aus Leidenschaft waren, mochten sich vielleicht deswegen nicht an sie gewöhnen können, weil sie in der alten Geometrie einer höchst anschauenden Erkenntnis gewohnt waren. Die neue Rechnung war für sie eine Reise auf den Flügeln des Wirbelwindes oder eine im Schlafe.

II.

Eine Potenz mit negativen Exponenten entsteht, wenn zwey Potenzen von einerley Wurzelgrösse durch einander dividirt werden, und der Exponent des Divisors grösser als der des Dividendus ist. Die Wurzelgrösse sey eine zweytheilichte

lichte $1+z$; man soll den Quotienten $\frac{(1+z)^n}{(1+z)^m}$ finden, oder die Potenz $(1+z)^{n-m}$ entwickeln. Wenn n und m ganze bejahte Zahlen sind, so muß man die Reihe $1+nz+\frac{n(n-1)}{1.\,2}z^2+$ etc. durch die $1+mz+\frac{m(m-1)}{1.\,2}z^2+$ etc. dividiren.

Wenn man diese Division nach den Regeln der Buchstabenrechnung würklich bewerkstelliget, so wird die Form des Quotienten gar nicht geändert, es mag m grösser oder kleiner als n seyn. Ist nun m kleiner als n, folglich $n-m$ eine ganze bejahte Zahl, so ist der Quotient die Potenz $(1+z)^{n-m}$ entwickelt,

oder, $1+(n-m)z+\frac{(n-m)\,(n-m-1)}{1.\,2}z^2$
$+\frac{(n-m)\,(n-m-1)\,(n-m-2)}{1.\,2.\,3}z^3+$ etc.

Diese Form gilt also auch, wenn m grösser als n, oder wenn $n-m$ eine verneinte ganze Zahl ist. Es ist demnach, wenn man für $n-m$ ein einziges Buchstabenzeichen $-n$ sezt, wo n die blosse Quantität, das beygesezte Zeichen die Qualität anzeigt,

$(1+z)$

$$(1+z)^{-n} = 1 - nz + \frac{n(n+1)}{1.\,2} z^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3} z^3$$

$$+ \cdots \pm \frac{n(n+1)\,(n+2)\cdots(n+r-1)}{1.\,2.\,3\,\cdots\,r} z^r$$

$\mp$ etc. Es ist hier von dem dritten Gliede an für jeden Factor im Zähler sein entgegengeseztes gesezt, wodurch, wenn ihrer eine gerade Anzahl ist, das Zeichen des Gliedes nicht geändert wird, welches aber — wird, wenn die Anzahl der Factoren ungerade ist.

III.

Aus der vieltheilichten Grösse $1 + az + bz^2 + cz^3 +$ etc. kan man die Wurzel von jedem Grade m durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes für ganze bejahte Exponenten ziehen, wenn m eine ganze bejahte Zahl ist. Die Methode ist dieselbe, welche zur Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln aus Zahlen gewöhnlich gelehrt wird. Man setze die Wurzel aus zwey Theilen $1 + Z$ zusammen, so ist $(1 + Z)^m = 1 + mZ +$ etc. $= 1 + az +$ etc, folglich $mZ +$ etc. $= + az +$ etc. und $Z = \frac{az}{m} +$ etc., wo die weggelassene Theile höhere Potenzen von z als die erste enthalten. Man nehme $1 + \frac{az}{m}$ für den ersten und Z für den

zwey-

zweyten Theil der Wurzel, so ist $(1 + \frac{a}{m}z + Z)^m$

$$= (1 + \frac{a}{m}z)^m + m(1 + \frac{a}{m}z)^{m-1}Z + \text{etc.}$$

Diese Reihe ist der $1 + az + bz^2 + \text{etc.}$ gleich.

Man ziehe das Stück $(1 + \frac{a}{m}z)^m$, oder

$1 + az + \frac{(m-1)a^2}{1.2.m}z^2 + \text{etc.}$ von ihr, ab,

so ist der Rest $bz^2 - \frac{m-1}{2m}a^2z^2 + \text{etc.}$

$= m(1 + \frac{a}{m}z)^{m-1}Z + \text{etc.}$, und $Z =$

$\frac{(2mb - (m-1)a^2)}{2mm}z^2 + \text{etc.}$ Man nehme die gefundenen drey Theile wiederum für den ersten Theil der Wurzel, und verfahre wiederum wie vorher; man ziehe nemlich die mte Potenz dieses ersten Theils von dem ersten Rest ab, das schon abgezogene Stück weggelassen, und dividire den Rest durch m, so hat man das vierte Stück der Wurzel. So findet man jeden der folgenden Theile so viel man ihrer haben will. Die mte Potenz des gefundenen Theils wird gefunden, indem man 1 für das erste Stück desselben, die übrigen Glieder zusammen für das zweyte Stück nimmt, dessen Quadrat, Cubus u. s. w.

u. s. w. durch die unmittelbare Multiplication gefunden werden können.

IV.

Man soll nun aus der Grösse $1 + mnz + \frac{mn(mn-1)z^2}{1.2} + \frac{mn(mn-1)(mn-2)}{1.2.3}z^3$ + etc. oder aus $(1+z)^{mn}$ die Wurzel vom Grade m ziehen. Beyde Zeichen m und n bedeuten ganze Zahlen.

Diese Wurzel ist $(1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2$ + etc. nach dem binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten. Wenn man aber die Ausziehung der Wurzel nach der Methode (III) verrichtete, ohne die Factoren des Products mn zu trennen, wenn es auch durch m zu dividiren wäre, so muß mn, so oft es vorkömt, durch m dividirt seyn, damit m ganz aus der Wurzel weggehe. Schaft man nun das m weg, so erhält man den Ausdruck für $(1 + z)^n$; und wenn man hingegen in diesem $\frac{mn}{m}$ für n schreibt, welches aus mn durch die Division mit m entstanden ist, so hat man die Wurzel aus $1 + mnz$ + etc., wie sie durch die unmittelbare Ausziehung gefunden werden würde, nemlich,

$1+$

$$1 + \frac{mn}{m} z + \frac{(mn:m)\,(mn:m-1)}{1.\ 2} z^2$$

$$+ \frac{(mn:m)\,(mn:m-1)(mn:m-2)}{1.\ 2.\ 3} z^3 + \text{etc.}$$

Ob man aber ein zusammengeseztes Zeichen mn oder ein einfaches n braucht, ist gleichgültig, und man würde also diese Form der Wurzel auch finden, wenn man n statt mn geschrieben hätte. Ist dis aber, so ist es einerley, ob n sich durch m dividiren läßt, oder nicht, weil durch die Quantität der Grössen die Form der Rechnung nicht geändert wird. Es ist also überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen bedeuten,

$$(1 + z)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m} z + \frac{n(n-m)}{1.2.\ m^2} z^2$$

$$+ \frac{n(n-m)\,(n-2m)}{1.\ 2.\ 3.\ m^3} z^3 + \text{- - -}$$

$$+ \frac{n(n-m)(n-2m) \text{ - - } (n-(r-1)m)}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - } r.\ m^r} z^r$$

+ etc. wo von dem dritten Gliede an jeder Factor des Zählers durch m multiplicirt, und das Product aller eben so vielmahl durch m dividirt ist.

V.

Wenn man 1 durch $(1 + z)^n$ oder $1 + nz$ $+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2} z^2 +$ etc. dividirt, so erhält man

den Quotienten $1 - nz + \frac{n(n+1)}{1.2}z^2 -$ etc. (II), und es ist hiebey gleichgültig, ob n eine ganze oder gebrochne Zahl bedeutet, da die Form des Quotienten von der Beschaffenheit der Grösse n gar nicht abhängt. Wenn man nun für n eine gebrochene Rationalzahl $\frac{n}{m}$ sezt, so ist der Divisor $= (1+z)^{n:m}$ (IV) und es ist also

$$\frac{1}{(1+z)^{n:m}} = (1+z)^{-n:m} = 1 - \frac{n}{m}z$$
$$+ \frac{n(n+m)}{1.2.m^2}z^2 - \frac{n(n+m)(n+2m)}{1.2.3.m^3}z^3$$
$$+ \cdot\cdot \pm \frac{n(n+m)(n+2m)\cdot\cdot(n+(r-1)m)}{1.2.3.\cdot\cdot\cdot\cdot r.m^r}z^r$$
$$\mp \text{ etc.}$$

VI.

Eine jede Irrationalzahl läßt sich so genau man will durch eine rationale $\frac{n}{m}$ ausdrücken. Die Formeln (IV. V.) dienen also auch, eine zweytheilichte Potenz mit irrationalem Exponenten so nahe auszudrücken, als man will, und da sie niemals unrichtig werden, so nahe auch $\frac{n}{m}$ der

der Irrationalzahl kömt, so gelten die Formeln auch, wenn man für $\frac{n}{m}$ die Grenze sezt, welcher sich diese Zahl ohne Ende nähert, das ist, die Irrationalzahl selbst.

VII.

Alle vorhergefundenen Formeln lassen sich unter einer einzigen begreifen, wenn man in der Binomialformel (I.) unter n jede Art von Zahlen, positiv oder negativ genommen, versteht. Man setze nun noch $\frac{b}{a}$ für z, so ist $a^n(1 + \frac{b}{a})^n$ oder $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b +$ etc. was auch n für eine Zahl seyn mag.

VIII.

Auf eine ähnliche Art kan man die Form jeder Potenz einer vieltheilichten Wurzel finden. Man setze die Potenz $(1 + z)^n$ oder

$$1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}z^4$$

$$= 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

Nun formire man die mte Potenz von $(1 + z)^n$, so hat man

$$(1+z)^{mn} = 1 + mnz + \frac{mn(mn-1)}{1.\ 2} z^2$$

$$+ \frac{mn(mn-1)(mn-2)}{1.\ 2.\ 3} z^3 +$$

$$\frac{mn(mn-1)(mn-2)(mn-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} z^4 + \text{etc.}$$

und nenne die Coefficienten, A, B, C, D, etc. daß $(1+z)^{mn} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ etc.

Wenn man nun aus der Vergleichung dieser Formeln herausbringt, wie die Coefficienten A, B, C, etc. auseinander und denen α, β, γ, etc. wie auch aus dem Exponenten m, und der Zahl ihrer Stelle formirt werden, so hat man die Form der Potenz $(1 + \alpha z + \text{etc})^m$. Zuerst ist $A = mn = m\alpha$.

Weiter ist $B = \frac{mn(mn-1)}{2}$, oder

$2B = (mn-1)A = (mn-n)A + (n-1)A$
$= (m-1)\alpha A + mn(n-1) = (m-1)\alpha A + 2m\beta$.

Der Coefficient B, der zu z^2 gehört, wird aus denen α, β durch m formirt, indem man die mte Potenz von $(1 + \alpha z) + \beta z^2$ macht, und die Factoren von z^2 zusammen nimt. Die übrigen Theile des Polynomium, als γz^3 etc. geben höhere Potenzen als die zweyte, und kommen noch nicht in Betrachtung. Bey der Formation der mten Potenz von $(1+z)^n$ heben sich einige Theile des Coefficienten B gegen einander

ander auf, weil α und β eine bestimte Relation darin gegen einander haben. Wenn man nun diese herausgegangenen Theile wieder hineinbringt, oder wenn man B aus den Coefficienten α und β selbst, wie auch A, welches wieder durch α gegeben ist, zusammensezt, so weiß man, wie B aus den gegebenen Binomialcoefficienten formirt wird, ohne auf ihre besondere Relation zu sehen. Folglich erhält man die allgemeine Formation dieses Coefficienten, α und β mögen für unabhängige Grössen seyn, welche sie wollen. Eben dis Raisonnement kan man auch für die Formation der folgenden Coefficienten machen.

Es ist $C = \frac{1}{3}(mn - 2)B$, oder

$$3C = (mn - 2n)B + (2n - 2)B = (m - 2)\alpha B + (n-1)(mn-1)A = (m-2)\alpha B + \tfrac{1}{2}(n-1)(2mn-n)A + \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2)A,$$ oder

$$3C = (m - 2)\alpha B + (2m - 1)\beta A + 3m\gamma.$$

Auf diese Art erhält man auch den Coefficienten D. Es ist $D = \frac{1}{4}(mn - 3)C$. Man zerfälle dis Product in zwey, nach der bisher gebrauchten Methode, und schreibe das weiter zu zerfällende Product, in seine zwey Theile zerfällt, darunter, und fahre so fort bis zu Ende, so daß man bey jeder Zerfällung einen Theil aus den gegebenen Coefficienten α, β, γ, δ, und A, B, C, welche aus α, β, γ, gegeben sind, zusammengesezt erhalte, wie folget.

$$4D = (mn - 3)\,C =$$
$$(mn - 3n)\,C + (3n - 3)(mn - 2)\,B : 3$$

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(2mn-2n)\,B + \tfrac{1}{2}(n-1)(2n-4)(mn-1)\,A : 2$$

$$\frac{1}{2.\,3}(n-1)(n-2)(3mn-n)\,A + \frac{1}{2.\,3}(n-1)(n-2)(n-3)\,mn$$

$$\frac{mn}{2.\,3}(n-1)(n-2)(n-3).$$

Die Glieder linker Hand sind zusammen genommen $=4D$, und wenn man α, β, γ, δ für ihre Wehrte sezt, so hat man

$$4D = (m-3)\,\alpha C + (2m-2)\,\beta B + (3m-1)\,\gamma A + 4m\delta.$$

Das Gesetz der Coefficienten ist aus den berechneten offenbar. Jeder besteht aus so viel Theilen, als die Zahl seiner Stelle Einheiten hat. Die Factores dieser Theile sind folgweise alle vorhergehende Coefficienten von dem nächsten an; die Coefficienten α, β, γ etc.; und die Glieder der arithmetischen Reihe $m-r+1$; $2m-r+2$; $3m-r+3$; etc. wo r die Stelle des Coefficienten anzeigt.

Es läßt sich dis Gesez auch nicht schwer allgemein erweisen. Es sey R der $r$te Coefficient der Reihe für $(1+z)^{mn}$, und Q, P, N, M, etc. die nächstvorhergehenden, so ist nach dem Gesetz der Binomialcoefficienten

$$rR = (mn - r + 1)\,Q$$
$$(r-1)\,Q = (mn - r + 2)\,P$$
$$(r-2)\,P = (mn - r + 3)\,N$$
$$(r-3)\,N = (mn - r + 4)\,M$$

etc. etc.

Da-

Daher erhält man nach der für D gebrauchten Art, unter jedes Product die Theile, worinn es zerfällt, zu setzen,

$$rR = (mn - r + 1)\,Q$$

$$(mn - n(r-1))\,Q$$
$$+ (n(r-1) - r + 1)(mn - r + 2)\,P : (r-1)$$

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(2mn - n(r-2))\,P$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n-1)(n(r-2) - 2(r-2))(mn - r + 3)\,N : (r-2)$$

$$\frac{1}{2.3}(n-1)(n-2)(3mn - n(r-3))\,N$$
$$\frac{1}{2.3}(n-1)(n-2)(n(r-3) - 3(r-3))(mn - r + 4)\,M : (r-3)$$

$$\frac{1}{2.3.4}(n-1)(n-2)(n-3)(4mn - n(r-4))\,M$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}(n-1)(n-2)(n-3)(n(r-4) - 4(r-4))\,M$$

u. s. w.

Die Producte, welche unter den zerfällten die ersten sind, geben den Coefficienten R in r multiplicirt. Es ist also, wenn man α, β, γ, etc. für ihre Wehrte substituirt,

$$rR = (m - r + 1)\,\alpha Q + (2m - r + 2)\,\beta P$$
$$+ (3m - r + 3)\,\gamma N + (4m - r + 4)\,\delta M$$
$$+ \text{etc.}$$

wo das Gesetz des Fortganges vollkommen erhellet.

Nach

Nach der für den Coefficienten B gemachten Bemerkung gilt diese Form der Coefficienten auch, wenn α, β, γ, etc. keine Binomialcoefficienten sind. Es ist daher überhaupt, wenn

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.})^m$$
$$=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

gesezt wird,

$$A=m\alpha$$
$$2B=(m-1)\alpha A+2m\beta$$
$$3C=(m-2)\alpha B+(2m-1)\beta A+3m\gamma$$
$$4D=(m-3)\alpha C+(2m-2)\beta B+(3m-1)\gamma A+4m\delta$$

etc.

Oder wenn $(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.})^{m-1}$ $=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$ gesezt wird, so ist

$$A=(m-1)\alpha$$
$$2B=(m-2)\alpha A+(2m-2)\beta$$
$$3C=(m-3)\alpha B+(2m-3)\beta A+(3m-3)\gamma$$
$$4D=(m-4)\alpha C+(2m-4)\beta B+(3m-4)\gamma A+(4m-4)\delta$$

etc.

Beweise dieser Formel durch die Differentialrechnung findet man in Hrn. Eulers Instit. calculi differentialis P. II. §. 202. und Hrn. Hofrath Kästners Analysis des Unendl. §. 56.

ENDE.

TAB. I.

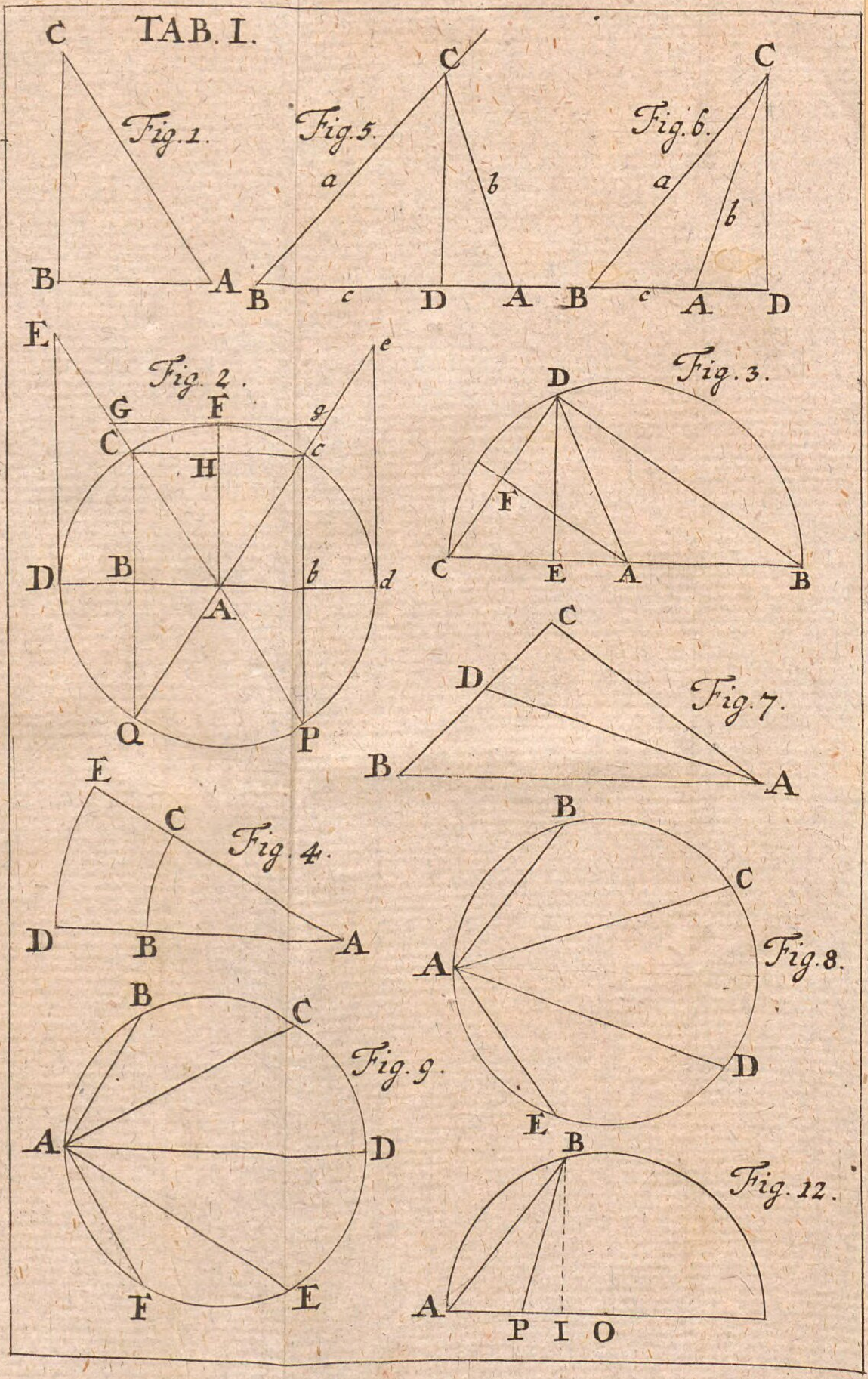


Fig. 1.
C
B
A
Fig. 5.
C
a
b
B
c
D
A
Fig. 6.
C
a
b
B
c
A
D
Fig. 2.
E
e
G
F
g
C
c
H
D
B
b
d
A
Q
P
Fig. 3.
D
F
C
E
A
B
Fig. 7.
C
D
B
A
Fig. 4.
E
C
D
B
A
Fig. 8.
B
C
A
D
E
Fig. 9.
B
C
A
D
F
E
Fig. 12.
B
A
P
I
O

TAB. II.

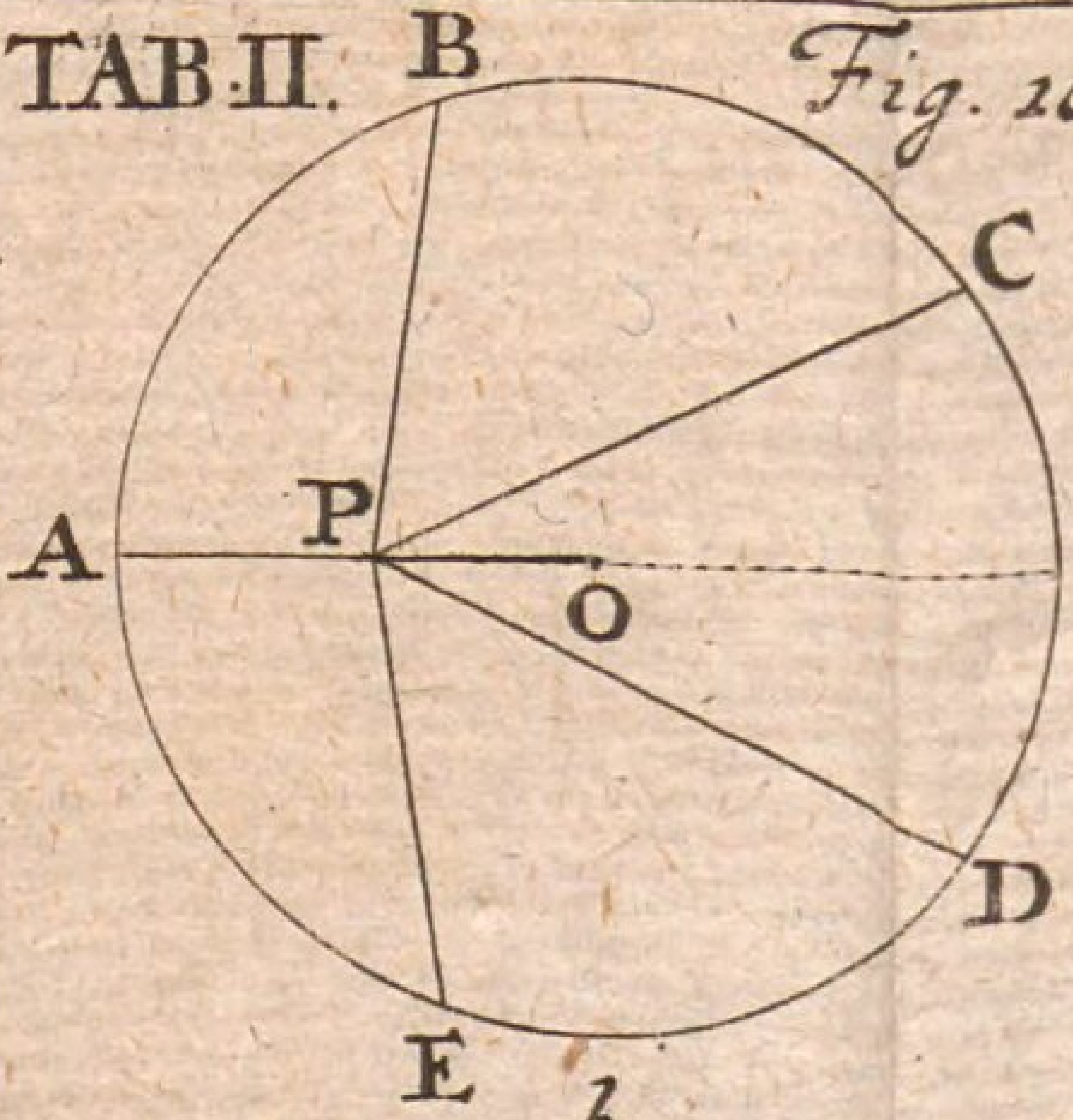


Fig. 10.

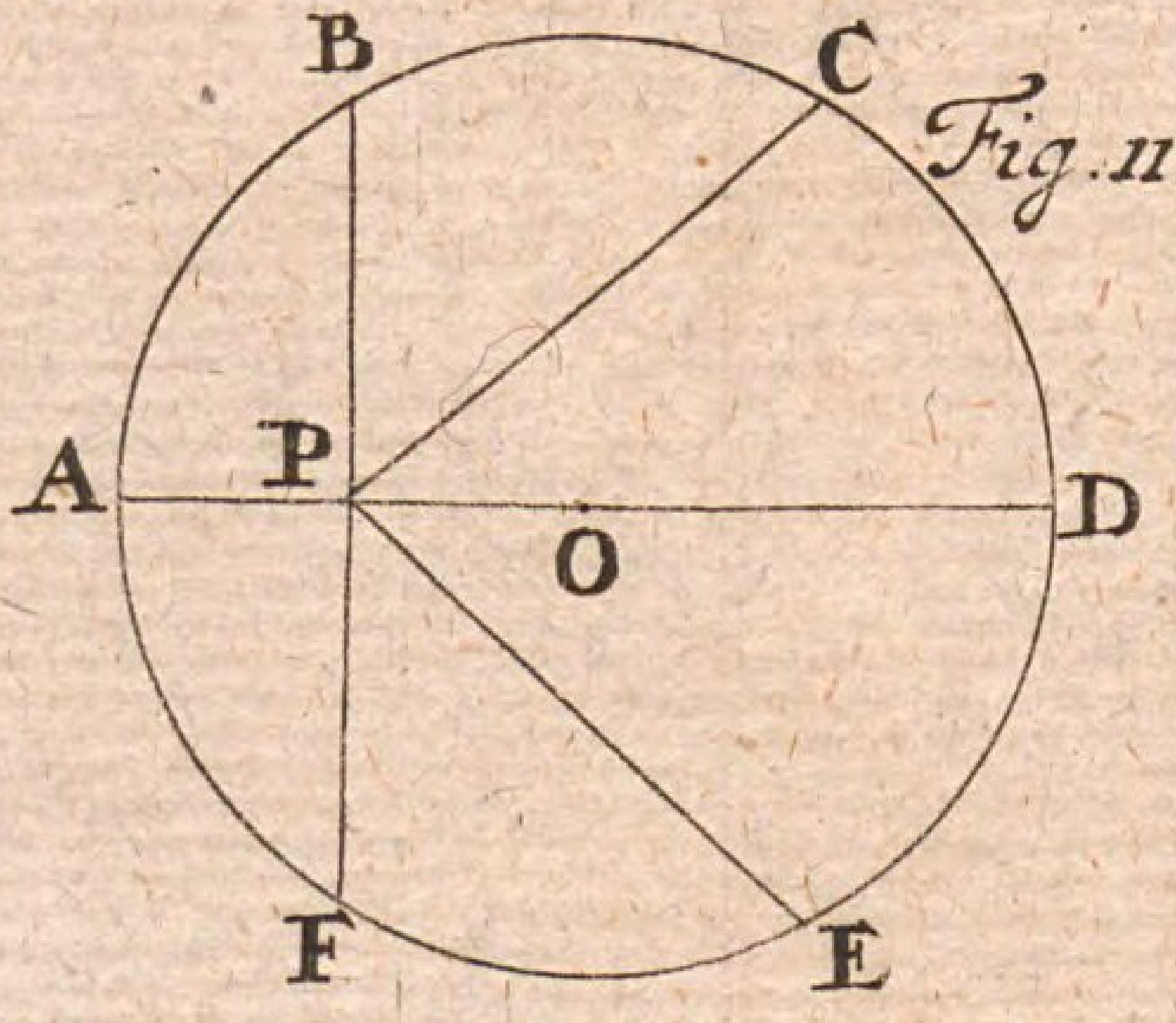


Fig. 11.

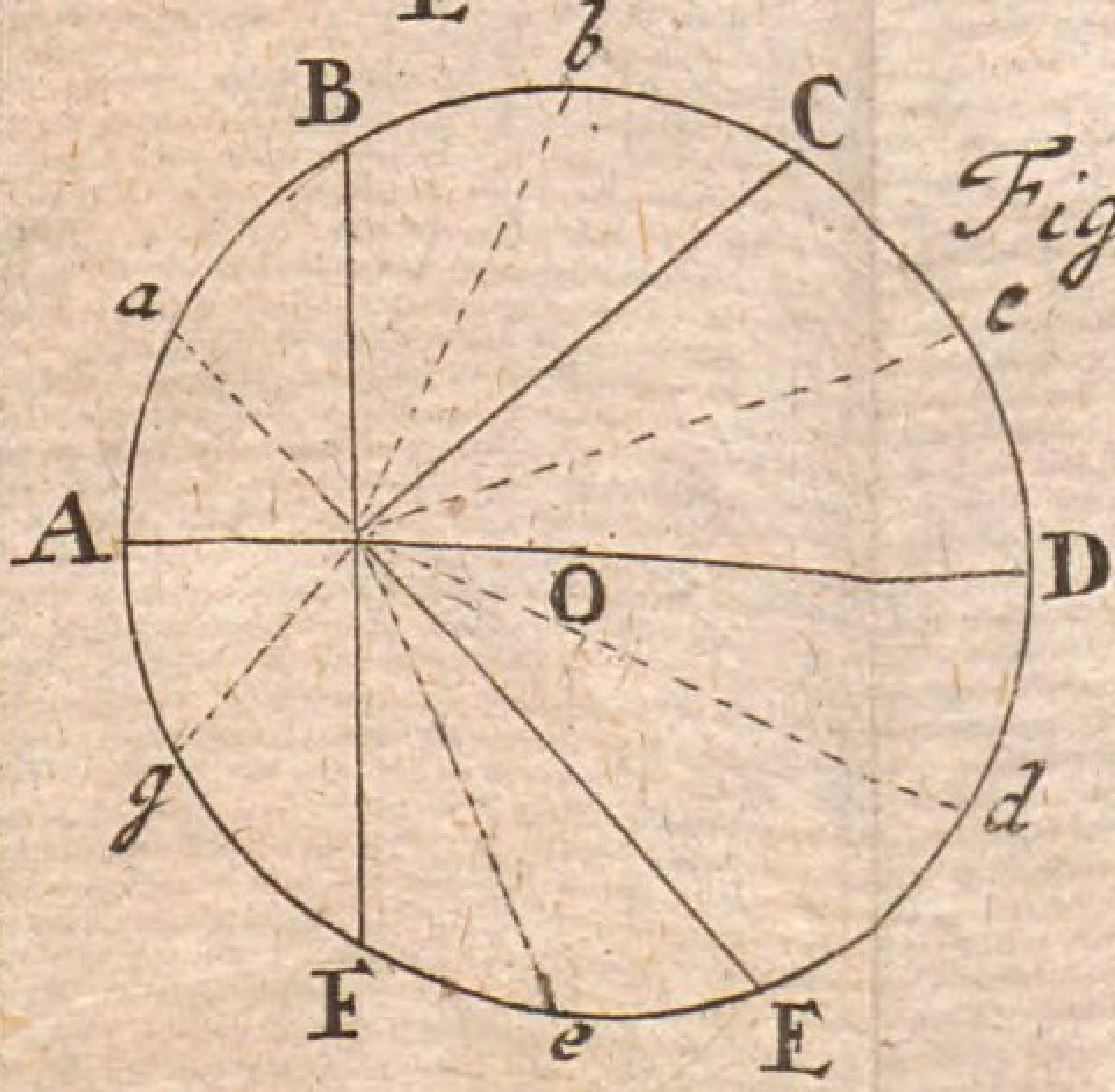


Fig. 13.

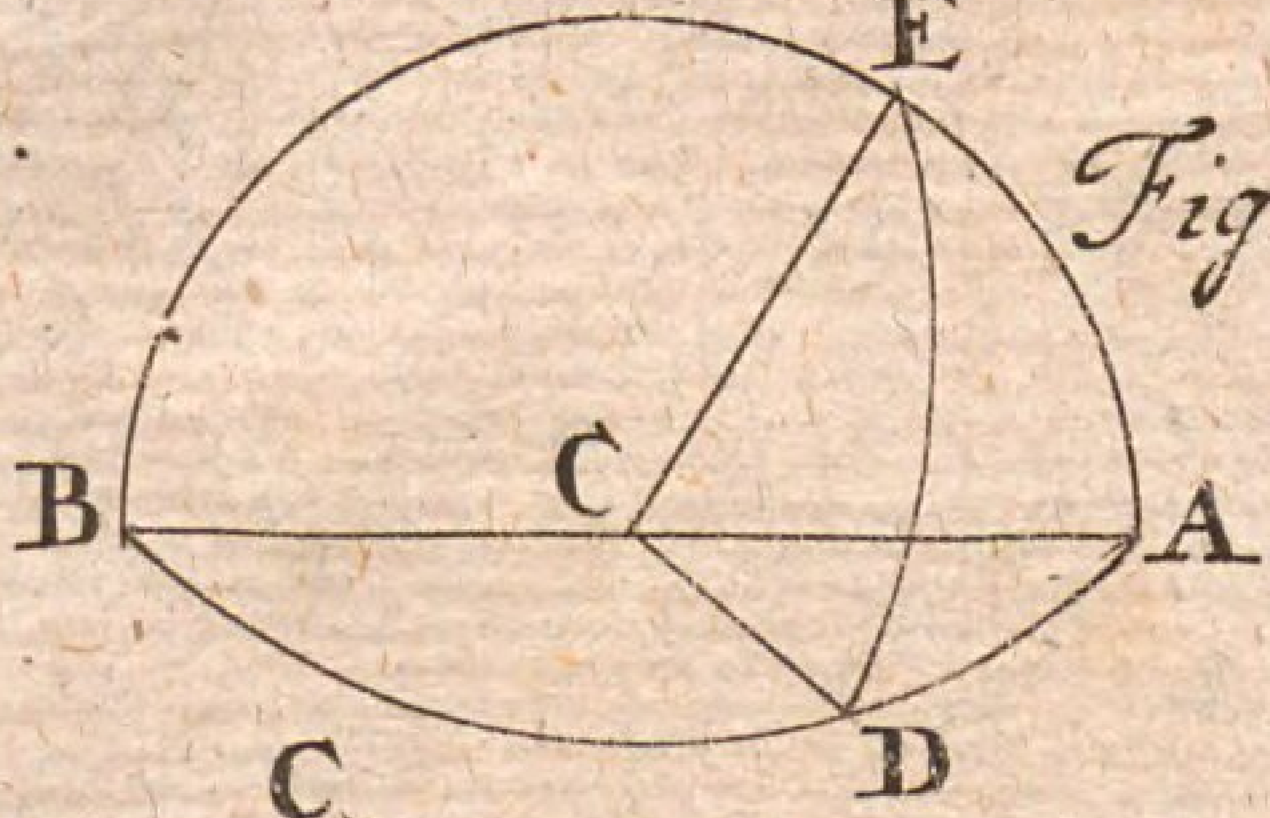


Fig. 14.

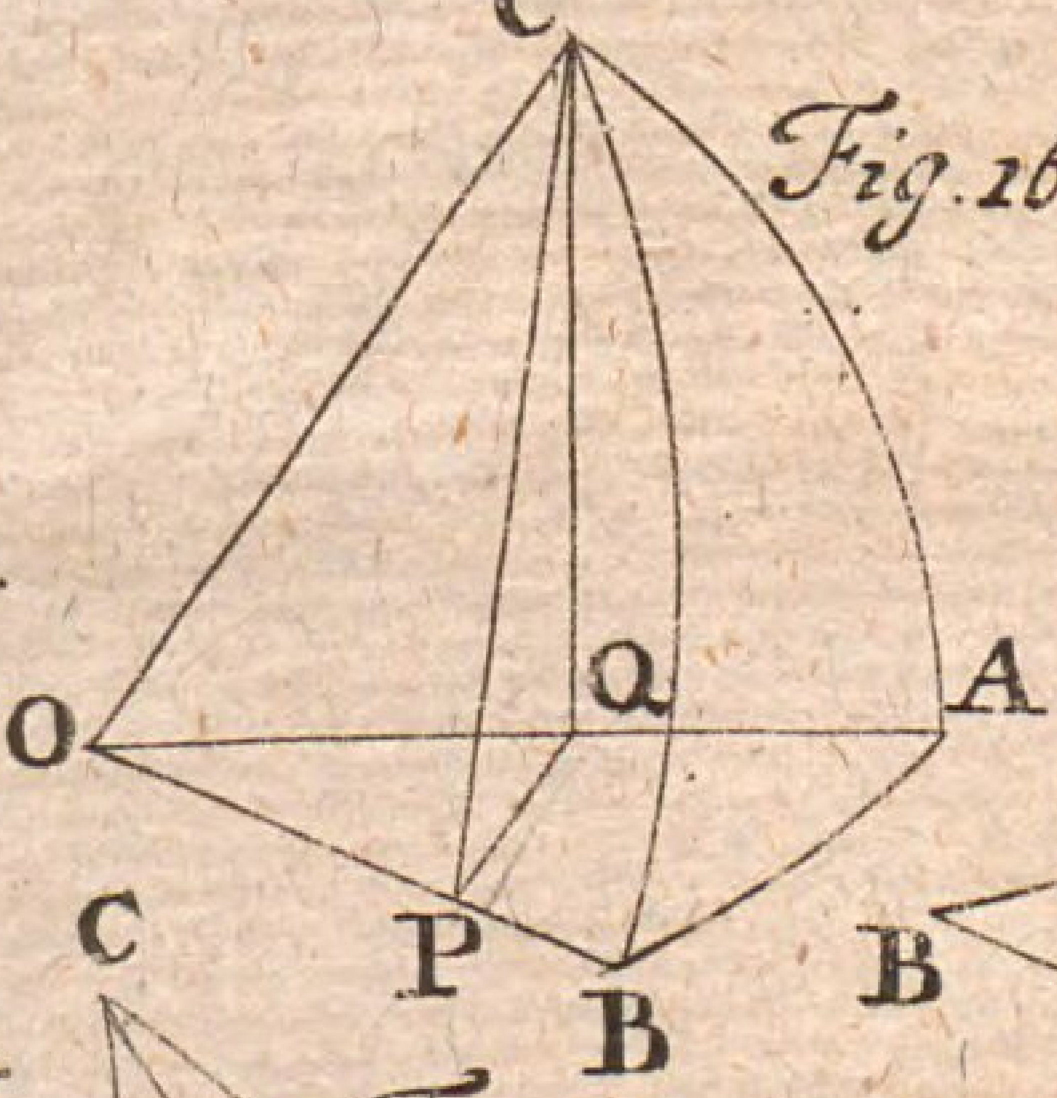


Fig. 16.

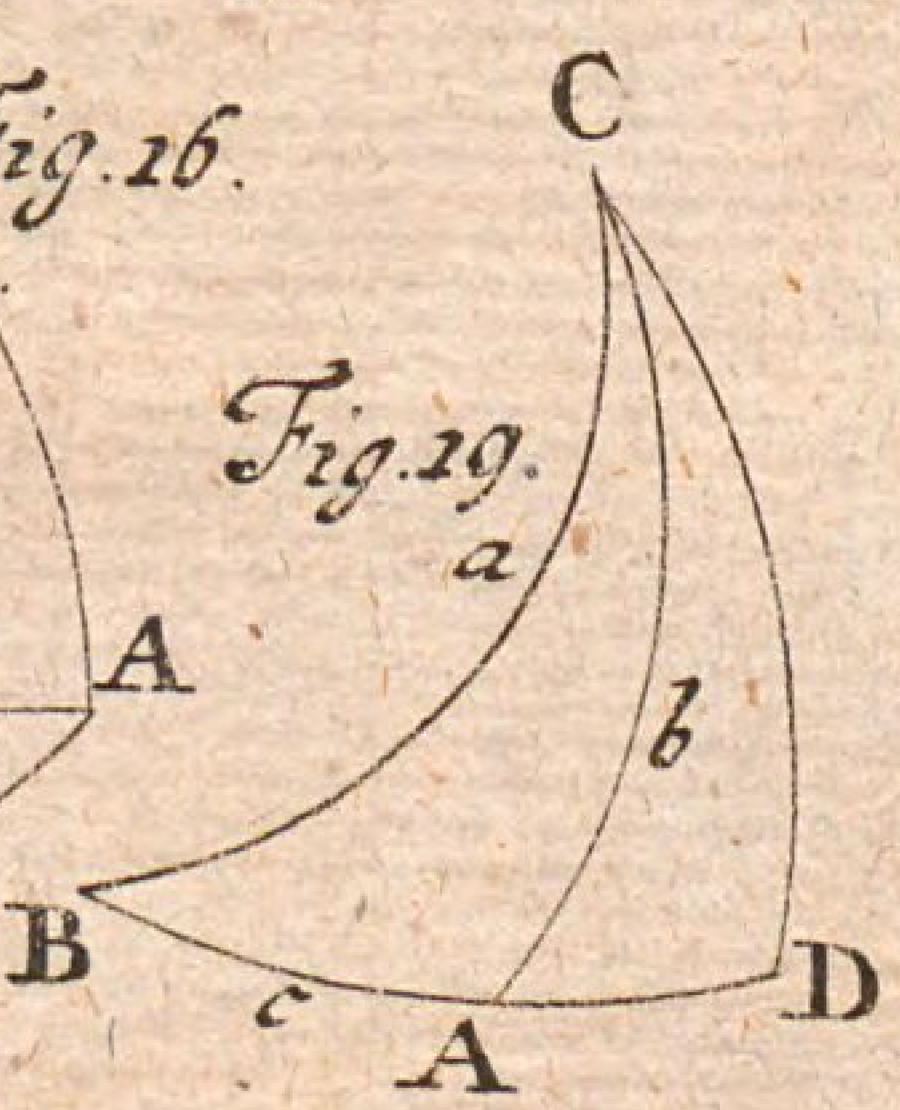


Fig. 19.

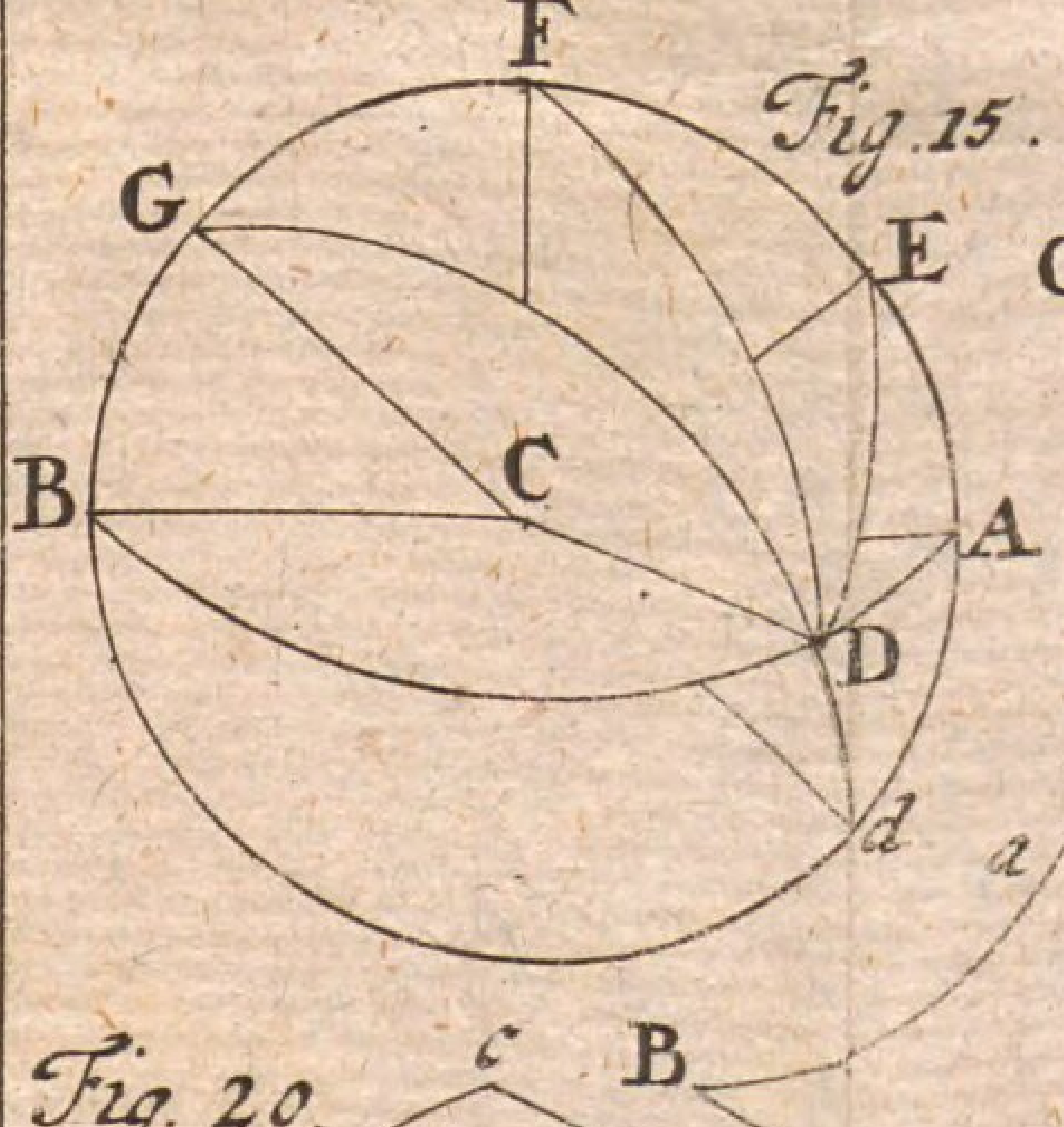


Fig. 15.

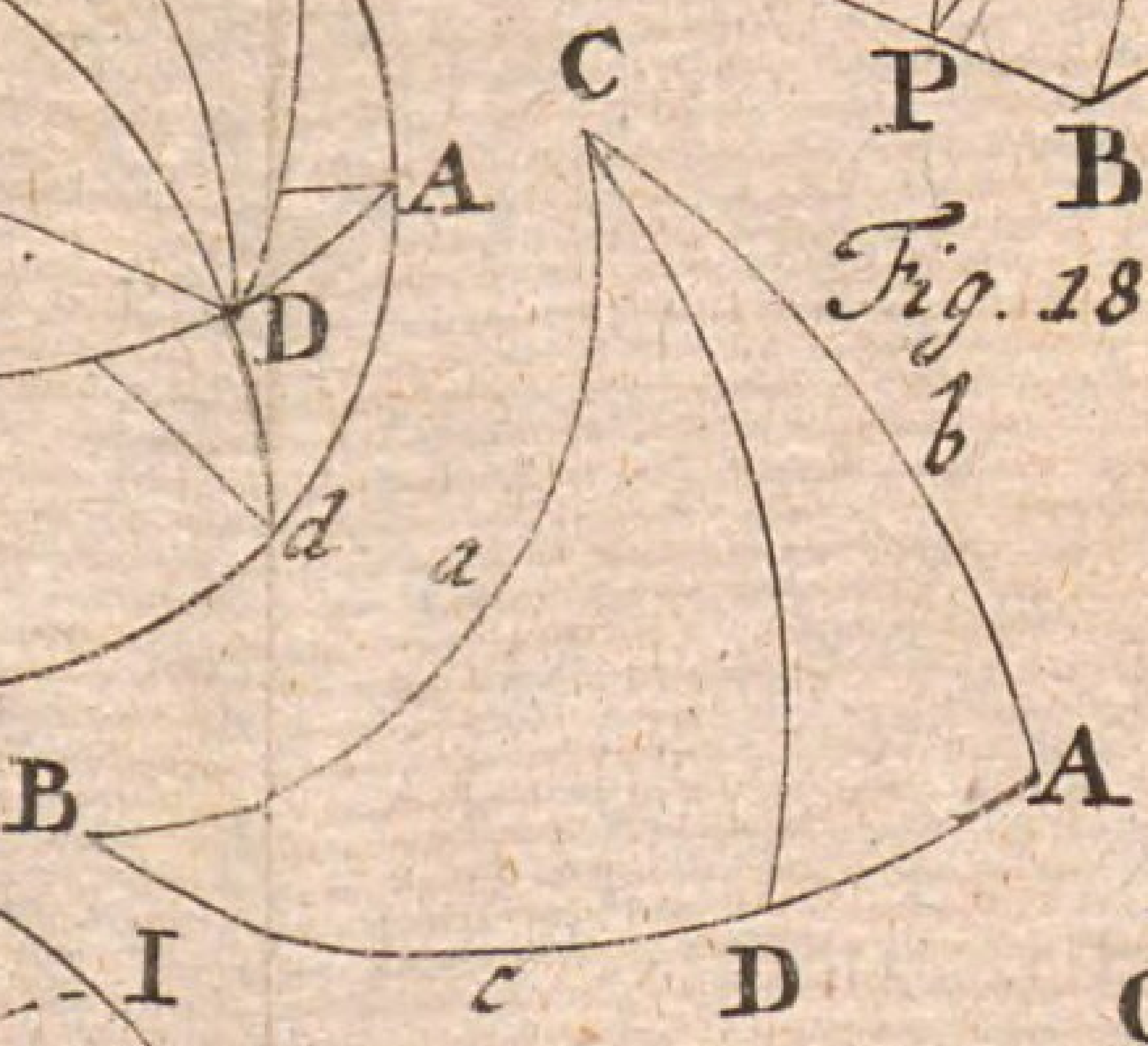


Fig. 18.

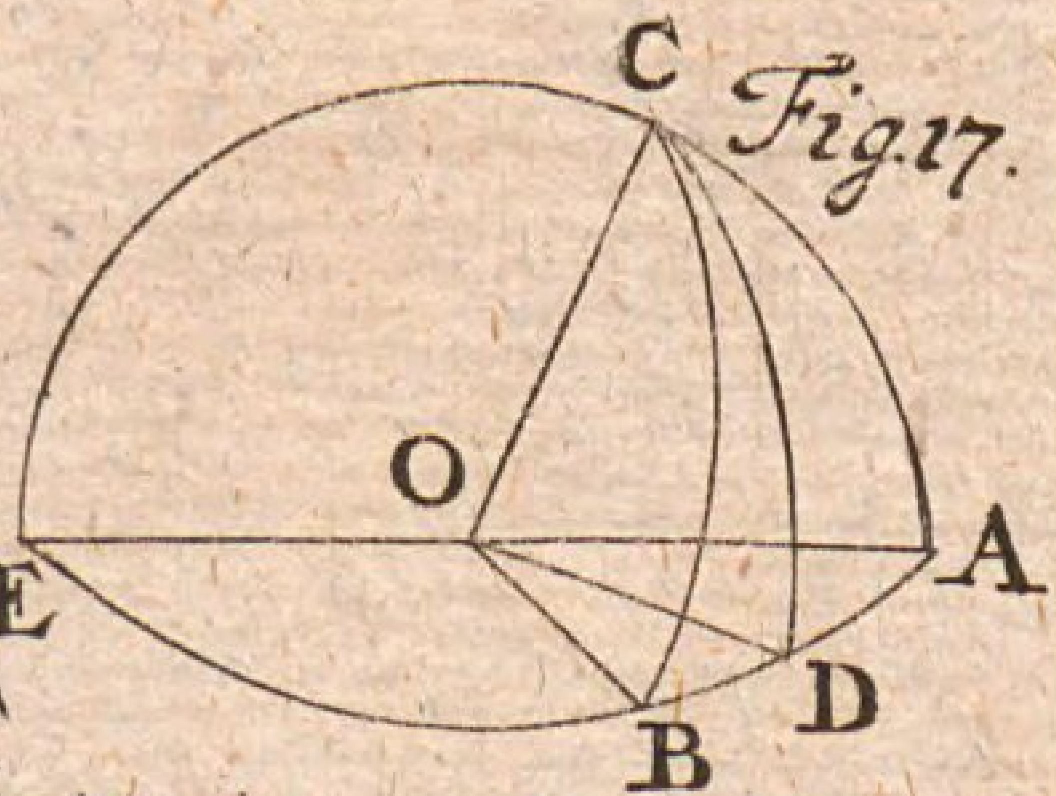


Fig. 17.

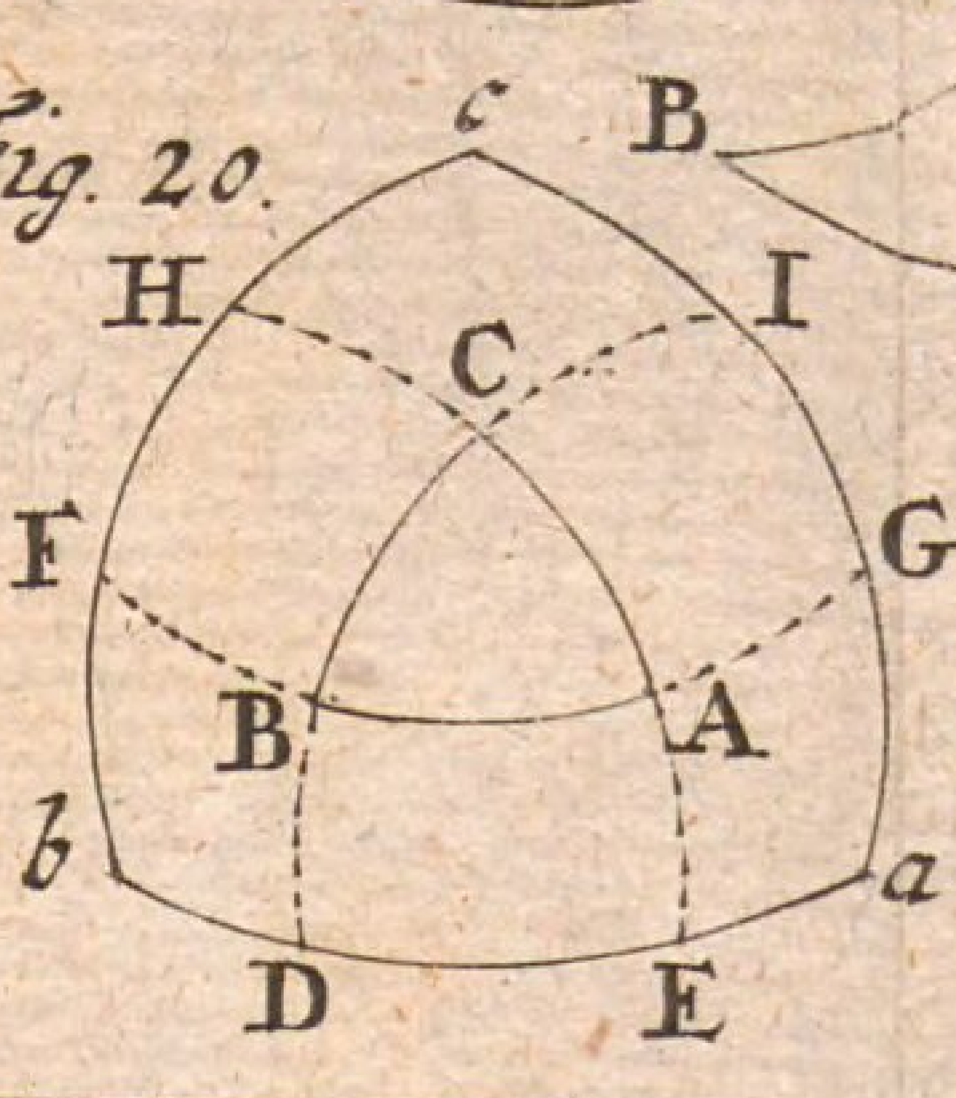


Fig. 20.

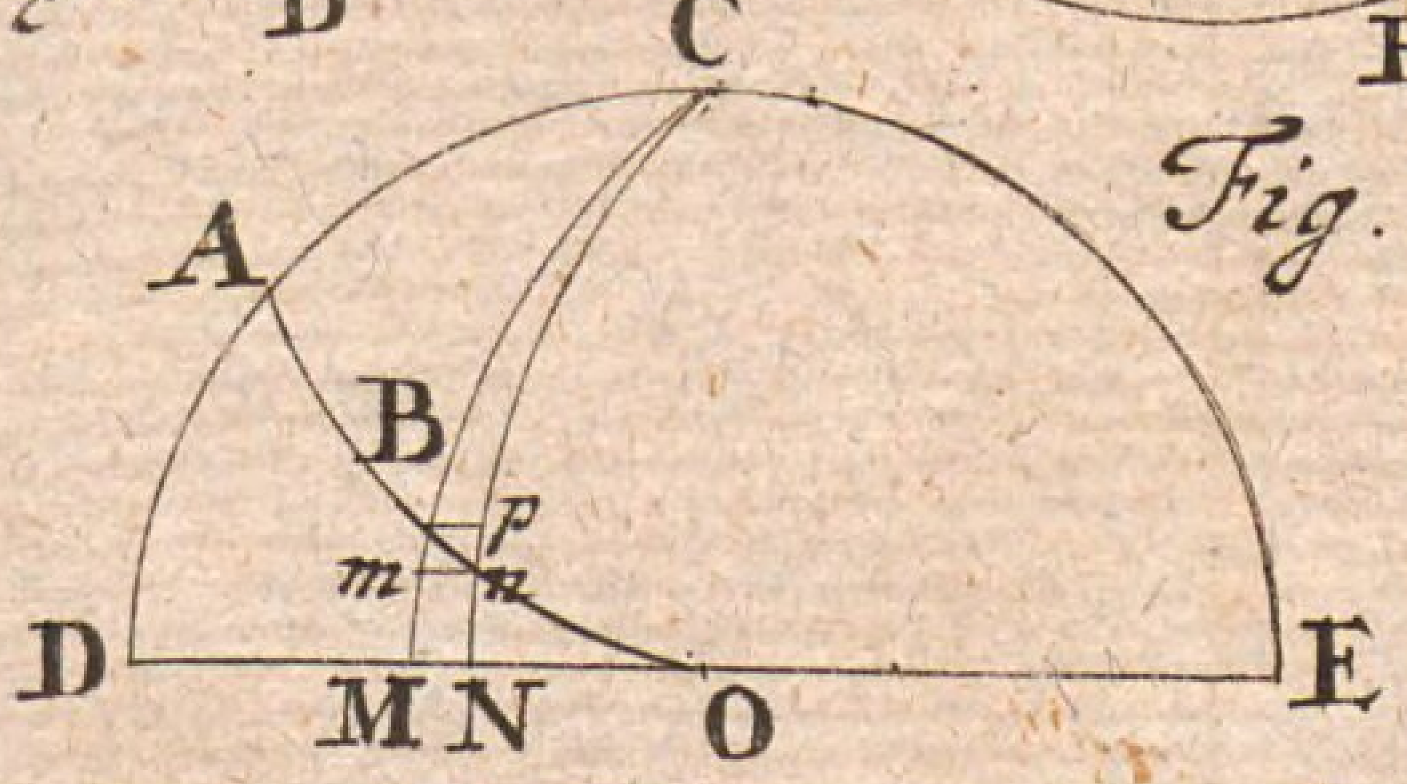


Fig. 21.

TAB III.

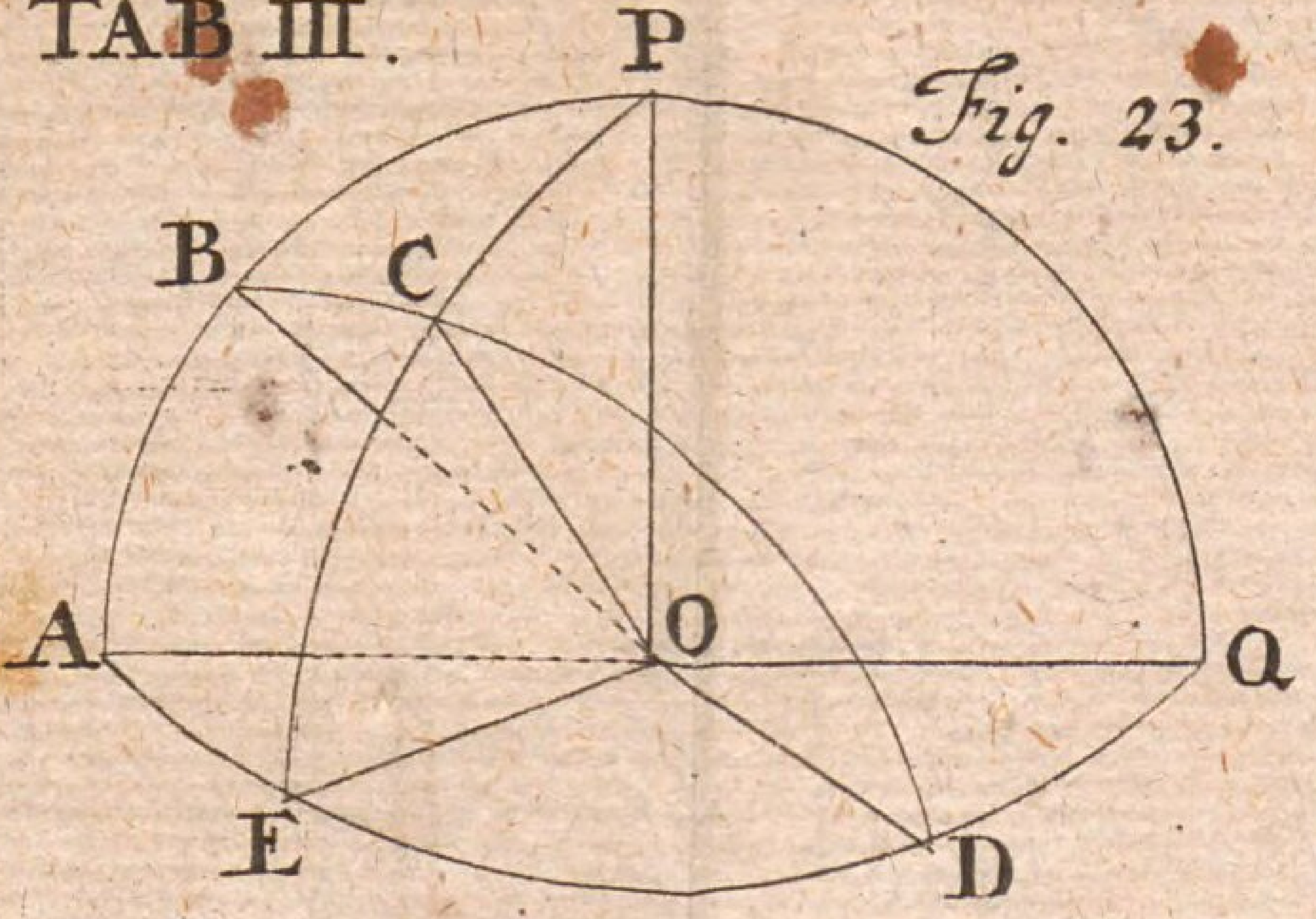


Fig. 23.

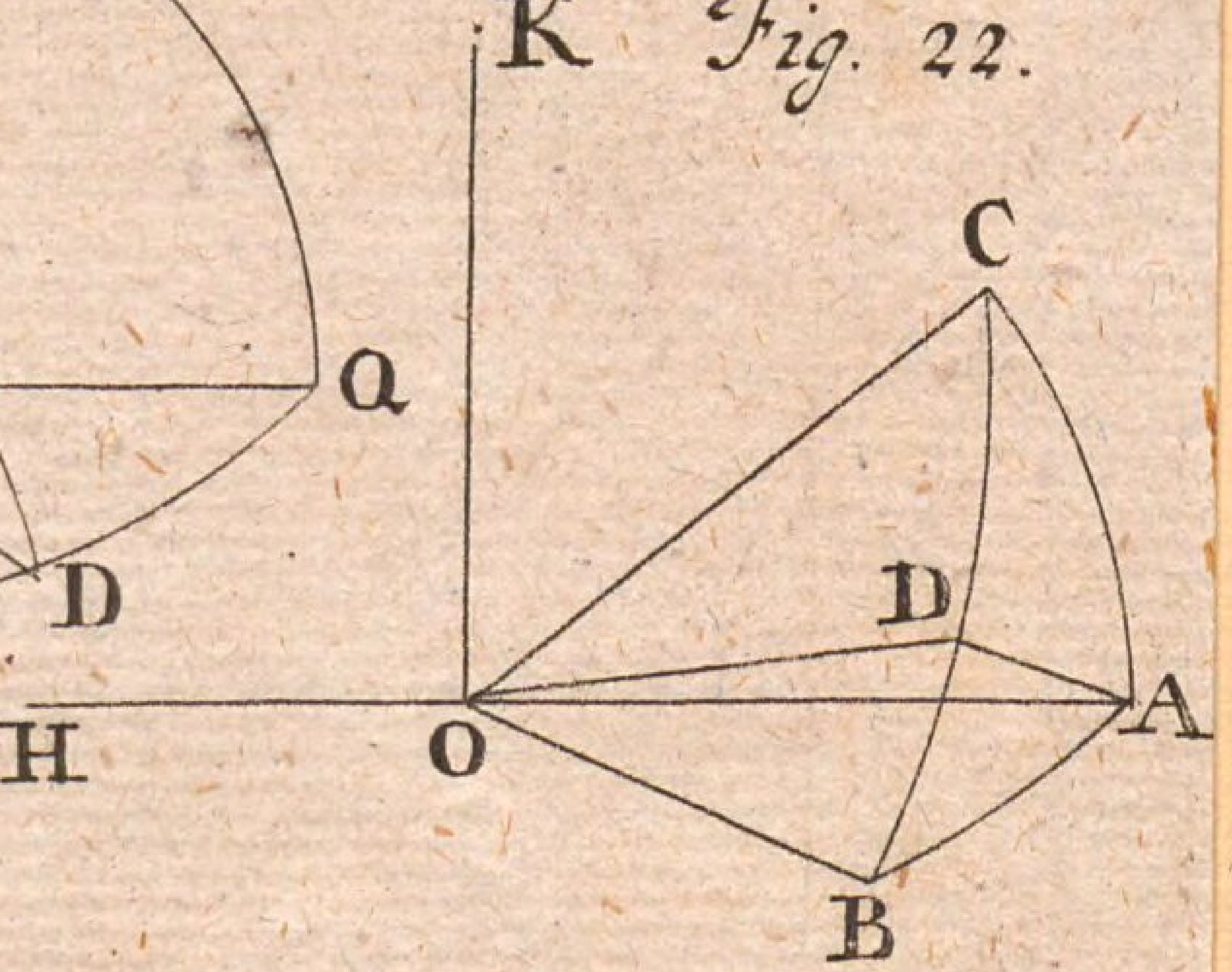


Fig. 22.

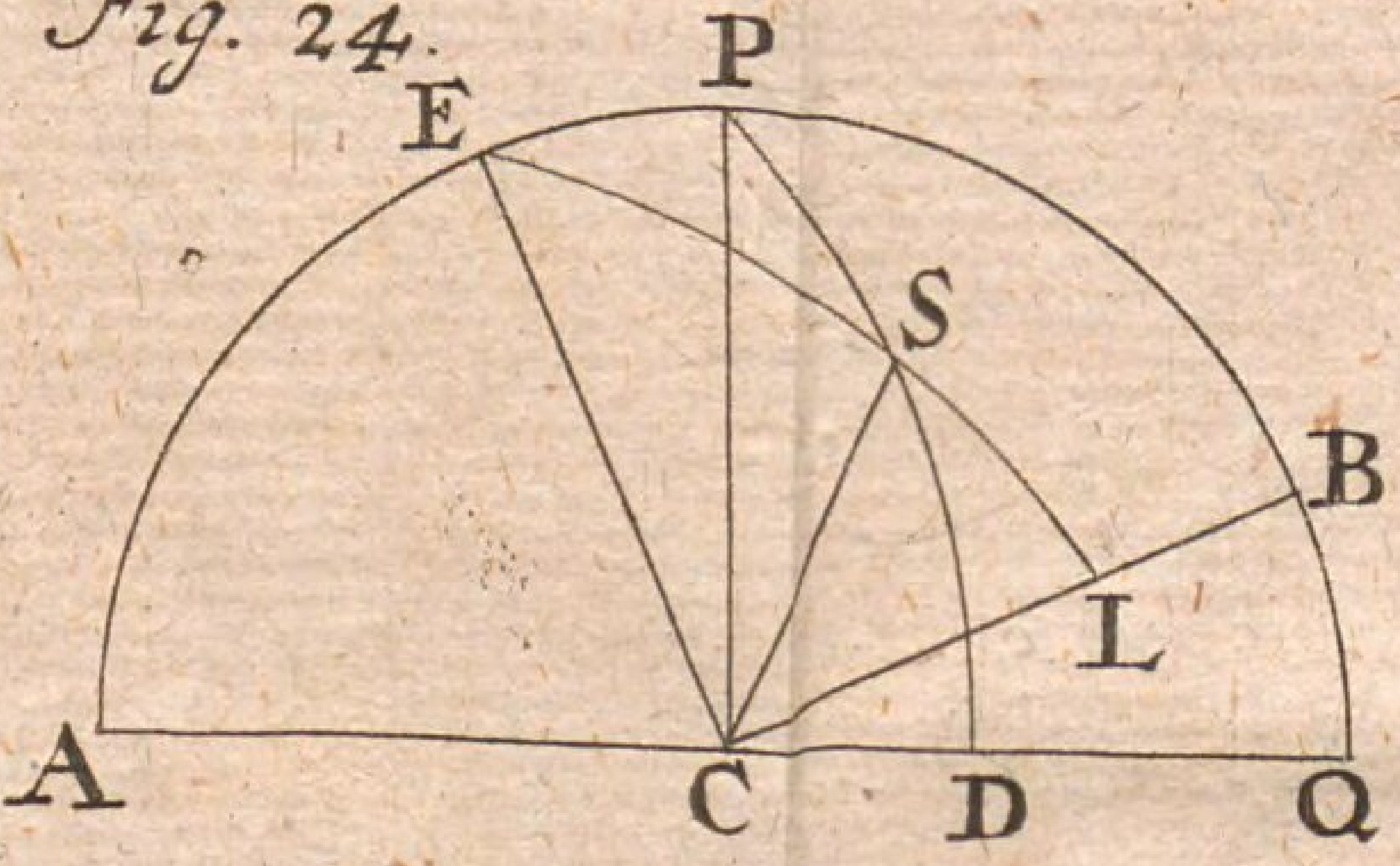


Fig. 24.

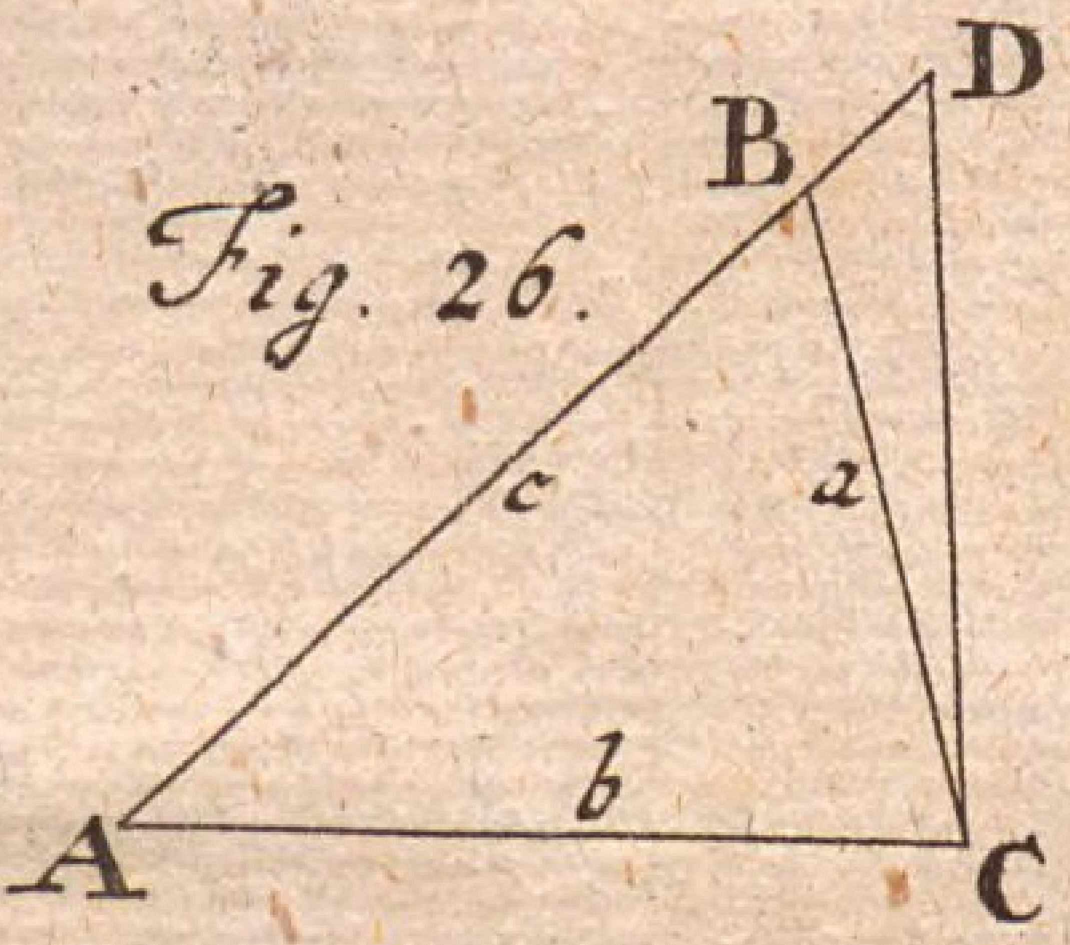


Fig. 26.

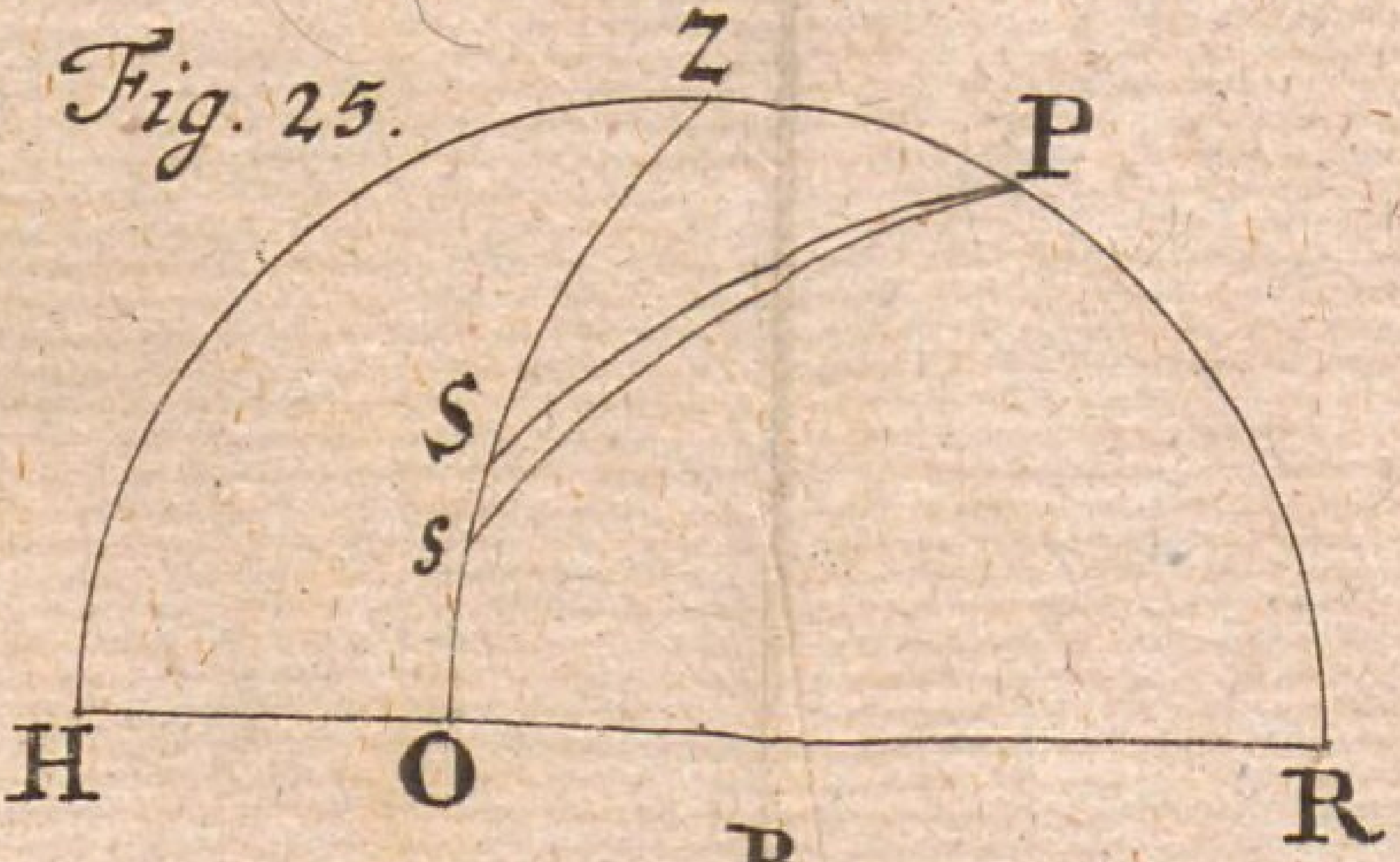


Fig. 25.

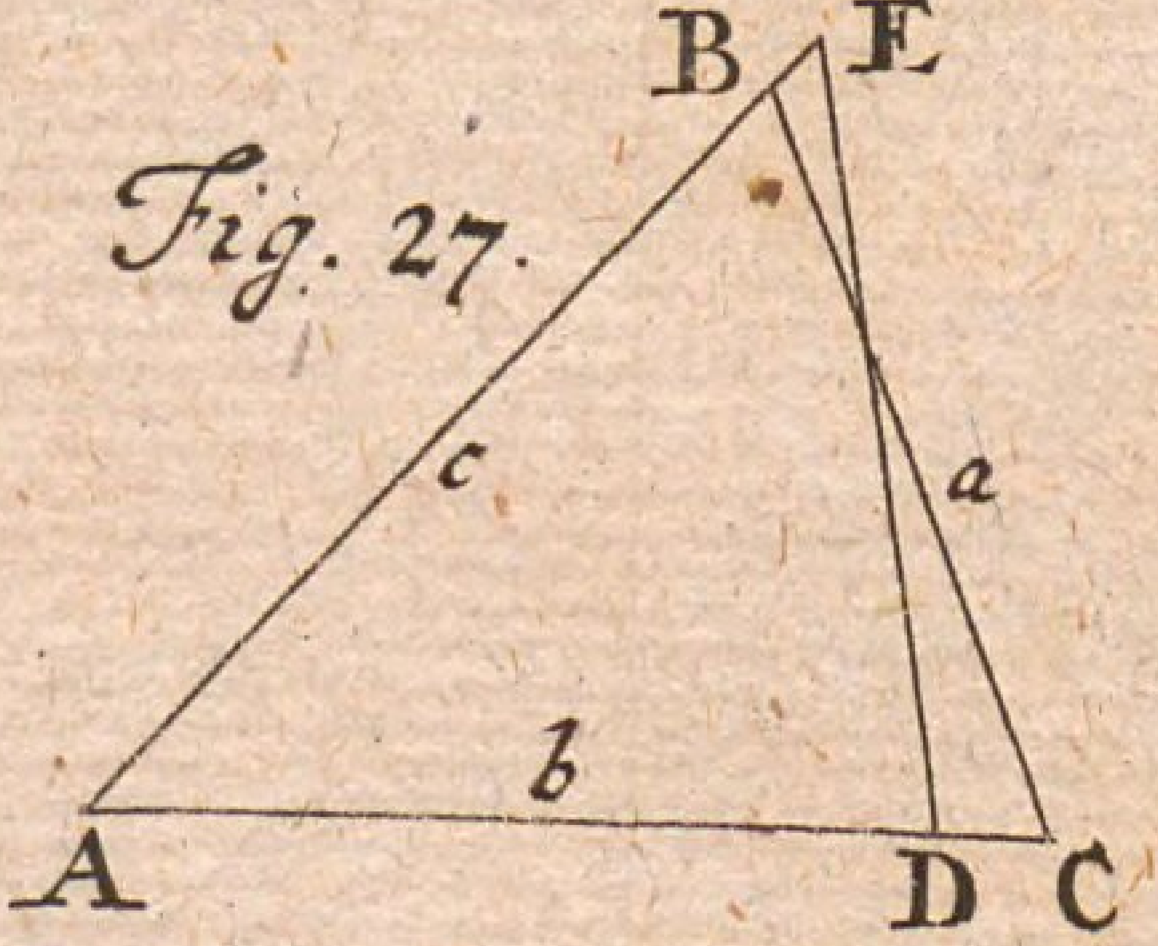


Fig. 27.

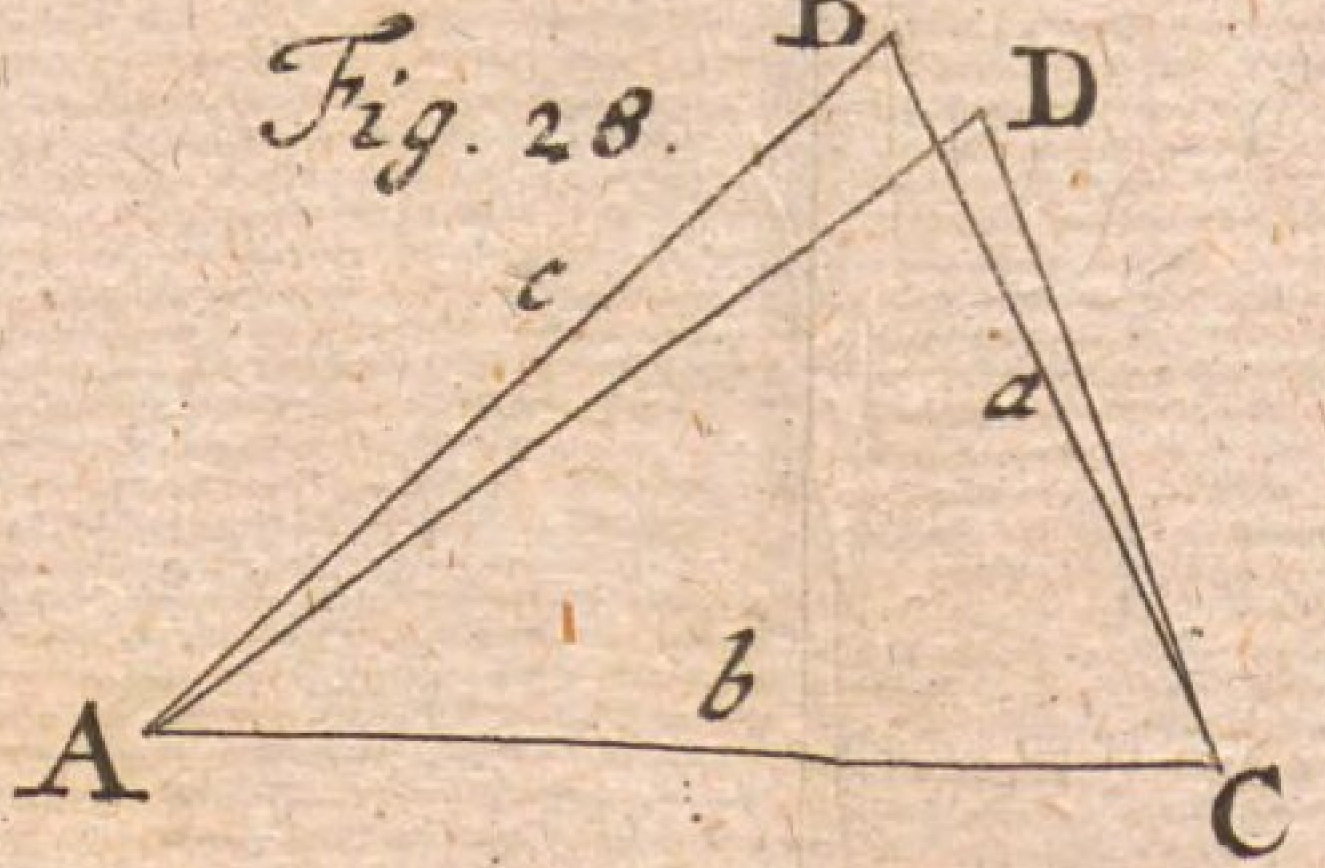


Fig. 28.

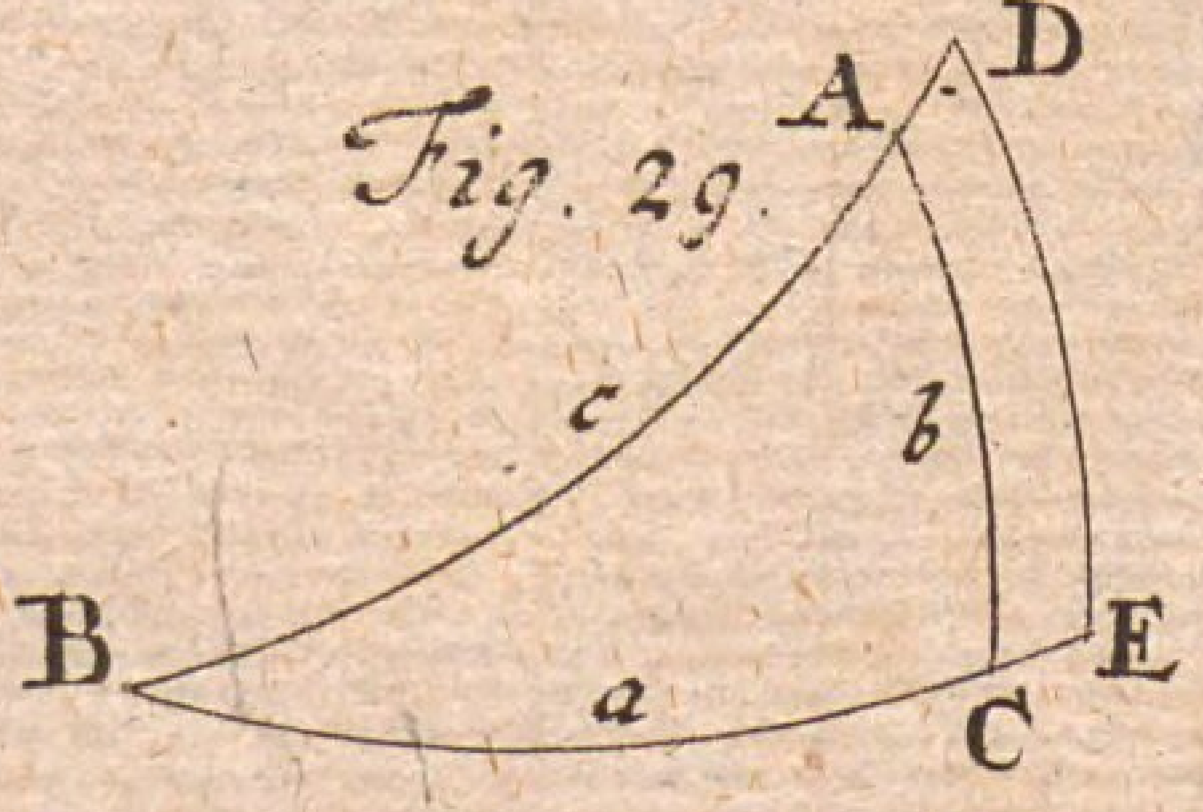


Fig. 29.

J. O'
B
R

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klügel, Georg Simon,

Analytische Trigonometrie

Braunschweig 1770

Math.p. 257
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082143-1
VD18 10543252